

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تفرقی مساواتیں

ایڈورڈ کے مکمل احصا کے آخری پانچ بابوں کا اردو ترجمہ

از

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے
پروفیسر ریاضیات، کلکتہ جامعہ عثمانیہ
حیدرآباد دکن

۱۷-۱۹۲۳ء

۱۳۴۱ھ ۱۳۴۲ھ ۱۹۲۳ء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

یہ کتاب سرسٹیکلن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

مضامین

تفرقی مساواتیں

صفحہ	مضمون
۱	باب اول - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں
۶	تفرقی مساوات کی تکوین -
۷	متغیر جدائی پذیر
	خطی مساواتیں
۱۴	باب دوم - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں (سلسل)
۲۱	تجانس مساواتیں
۲۶	ایک حرف غائب
	کلیدی صورت
۳۲	باب سوم، رتبہ دوم کی مساواتیں، ٹھیک تفرقی مساواتیں
۳۴	خطی مساواتیں
	ایک حرف غائب
۳۷	خطی مساوات کی عام سے عام صورت، کسی ایک رقم کا
۳۹	نکال دنا -
	ٹھیک تفرقی مساواتیں

۴۴	باب چہارم۔ مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتیں
۴۵	متمم تفاعل
۵۶	خاص تکملی
۷۳	ایسی مساوات جو مستقل سروں والی خطی مساوات کی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے
۷۶	باب پنجم۔ قائم مری متفرق مساواتیں
۸۱	قائم مری
۸۳	علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں
۹۲	مزید توضیحی مثالیں
	جوابات

تفرقی مساواتیں

باب اول

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں
متغیر جدائی پذیر۔ خطی مساواتیں

۱۔ تکملی احصا کے اختتام پر چند معمولی قسم کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عام طریقوں کا سرسری ذکر کر دینا مقصود ہے، اس طرح کی مساواتیں طالب علم کو تحلیلی سکونیات، ذرہ کے علم حرکت اور استوار اجسام کے علم حرکت (کے ابتدائی حصوں) کے مطالعہ میں کارآمد ہوں گی۔

اس جگہ ہم ان تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کی مطلق کوشش نہیں کریں گے جن میں جزوی، تفرقی سر شامل ہوتے ہیں۔

۲۔ تفرقی مساوات کی تکنیکیں

ذرا سی دیر کے لئے ہم اس موضوع پر غور کریں گے کہ تفرقی مساوات کس طرح پیدا ہوتی ہے اور اس کے ”دخصل“ کی نوعیت کیا ہونی چاہئے۔

اس طرح کی مساوات

ف (لا، ما، ا) = (۱)

جس میں تفاعل کی شکل معلوم ہے منحنیات کے ایک خاص قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اس قبیل کے کسی ایک رکن کے لئے ا کی ایک خاص قیمت ہے جو ایک ہی منحنی کے تمام نقاط کے لئے وہی رہتی ہے، لیکن اس قبیل کے مختلف منحنیات کے لئے مختلف ہے۔

علم ریاضی میں ایسے سوالات اکثر واقع ہوتے ہیں جن میں منحنیات کے پورے قبیل پر یا تمام عمل کرنا مقصود ہوتا ہے۔

مثلاً ایک سوال یہ ہے، منحنیات کا ایک ایسا قبیل معلوم کرو جس کا ہر ایک رکن ایک معلوم قبیل کے ہر ایک رکن کو ایک زاویہ معلومہ (مثلاً زاویہ قائمہ) پر قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح کے عملوں میں منحنی کو مخصوص کرنے والا حرف ا تفاعل زیر بحث میں بطور ایک مستقل مقدار کے واقع نہیں ہونا چاہئے ورنہ پورے قبیل پر ایک بجا عمل کرنے کی بجائے ہم اس قبیل کے ایک خاص رکن پر عمل کر رہے ہوں گے۔ اس طرح سا قہ ہو سکتا ہے۔

مساوات کو ا کے لئے حل کرو اور اسے شکل ذیل میں لکھو

ف (لا، ما) = (۲)

بمطابق لا کے تفرق کرنے سے ا نکل جاتا ہے اور (۱) کی بجائے

ایک مساوات لا، ما اور ما میں حاصل ہوتی ہے۔

یہ ممکن ہے کہ تفرقی مساوات کے بنانے میں ا کے لئے مساوات حل نہ ہو سکے۔ اس صورت میں

مساوات ف (لا، ما، ا) = (۱)

کا بمطابق لا کے تفرق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جف ف} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dots\dots\dots (۳)$$

اب مساواتوں (۱) اور (۳) سے λ کو سا قہ کرنے سے ایک ربط
لا، ما، ب میں حاصل ہوتا ہے جو سارے قبیل کے لئے درست ہے۔
مثال کے طور پر خطوط مستقیم کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوات
میں اختیاری مستقل m کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$m \text{ کے لئے حل کرنے سے } \frac{m}{\lambda} = \frac{m}{\lambda}$$

$$\text{تفرق کرنے سے } \frac{\lambda - \lambda}{\lambda} = 0$$

یا بطرز دیگر m کے لئے حل کرنے کے بغیر

$$\frac{m}{\lambda} = \frac{m}{\lambda}$$

اس لئے یہ مساوات ان تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات ہے جو مبدأ میں
سے گذرتے ہیں اور اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ مبدأ میں سے
گذرنے والے کسی خط مستقیم کی سمت اس کے کسی نقطہ پر وہی ہے
جو اس نقطہ اور مبدأ کو ملائے والے سمتی کی ہے۔

۳۔ اب فرض کرو کہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرنے والی مساوات

$$f(\lambda, m, b) = 0 \quad (۱)$$

ہے جس میں دو اختیاری مستقل λ ، b ہیں اور قبیل کے مختلف
منحنی ان مستقلات کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ لہذا
لائے اوپر کی مساوات کا ایک دفعہ تفرق کرنے سے لا، ما، ب، λ ، b
میں ایک ربط حاصل ہوگا فرض کرو کہ یہ ربط ہے

$$f(\lambda, m, b) = 0 \quad (۲)$$

اگر ایک دفعہ اور بلحاظ لا کے اس کا تفرق کیا جائے تو
لا، ما، ما، ما، لا، ب میں ایک ربط ملے گا، فرض کر دو کہ یہ حسب
ذیل ہے

صہ (لا، ما، ما، ما، لا، ب) = (۳)

ان تین مساواتوں سے لا، ب ساقط ہو سکتے ہیں کم از کم نظری لحاظ
سے (اگر یہ پہلے سے عمل تفرق میں ساقط نہیں ہو چکے) اس طرح
لا، ما، ما، ما، لا، ب باہم منسلک کرنے والا ایک ربط مثلاً

ف (لا، ما، ما، ما، لا، ب) =
حاصل ہو گا جو قبیل مفروض کی تفرقی مساوات ہوگی۔
۴۔ مساوات کا رتبہ

تعریف کے طور پر ہم اسے مان لیتے ہیں کہ تفرقی مساوات کا رتبہ
اس اعلیٰ ترین تفرقی سرے متین ہوتا ہے جو اس میں واقع ہوتا ہے۔
ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر دو جمہولوں کی کسی مساوات میں ایک اختیاری
مستقل واقع ہو تو اس مستقل کو ساقط کرنے پر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات
جمل ہوتی ہے اور اگر مساوات میں دو اختیاری مستقل واقع ہوں تو انہیں
ساقط کرنے پر دوسرے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔
یہ استدلال بالکل عام ہے، ان اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے کیلئے
ہمیں ن دفعہ تفرق کرنا ہو گا اور اس طرح لا، ما، ما، ما، لا، ب کو
باہم ربط دینے والی ایک تفرقی مساوات حاصل ہوگی جس کا رتبہ صیرک
ن ہو گا۔

مثال ۱۔ مساوات لا، ما = لا، ج سے لا اور ج کو
ساقط کرو۔

تفرق کرنے سے لا، ما، ما = لا

دوبارہ تفرق کرنے سے لا، ما، ما + لا = لا

صرف عمل تفرق سے ہی مستقل غائب ہو چکے ہیں، اور یہ دوسرے

رتبہ کی تفرقی مساوات ہے (واضح ہو کہ بڑے سے بڑا تفرقی سر اس میں
 ما ہے) جو ان تمام دائروں سے متعلق ہے جن کے مرکز لا، محور پر
 واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ ان تمام مرکز دار مخروطی تراشوں کی تفرقی مساوات معلوم
 کرو جن کے محور محدود کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔

مخروطیوں کے اس قبیل کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات ہوگی

$$1 + 2 + 3 = 4$$

تفرق کرنے سے $1 + 2 + 3 = 4$

دوبارہ تفرق کرنے سے $1 + 2 + 3 = 4$

جس سے $1 + 2 + 3 = 4$

مطلوبہ تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۵۔ عمل استقاط الٹ نہیں سکتا۔

بالعموم اوپر کا عمل استقاط الٹ نہیں سکتا اور جب ایک قبیل کی
 تفرقی مساوات دی ہوئی ہو اور ہم اس کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی
 مساوات معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں عمل اسکل کی طرح چند معیاری صورتوں
 سے کام لے بغیر چارہ نہیں ہوتا اور کئی مساواتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں
 جنہیں ہم مطلق حل نہیں کر سکتے۔

تتاہم اوپر کی دفعات سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ن ویں رتبہ
 کی تفرقی مساوات کو حل کرنا مقصود ہو تو ہمیں لا، ما اور ن اختیاری
 مستقلات میں ایک ایسا جبریہ ربط معلوم کرنا چاہئے کہ ان مستقلات
 کو ساقط کرنے پر مفروضہ تفرقی مساوات حاصل ہو سکے۔ ایسا جبریہ
 ربط مساوات کا عام سے عام حل خیال کیا جاتا ہے۔

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۶۔ انکی پانچ معیاری صورتیں ہیں
صورت اول۔ متغیر جدائی پذیر

وہ تمام مساواتیں جن میں فر لا اور لا و الی تمام رتھیں مساوات کے ایک طرف اور فر ما اور ما و الی تمام رتھیں دوسری طرف لائی جائیں اس صورت کے تحت میں آتی ہیں اور تکمیل کرنے سے فوراً حل ہو سکتی ہیں

مثال ۱۔ مثلاً اگر $\frac{ق}{م} = \frac{ق}{لا} - \frac{ق}{فر ما}$

تو $\frac{ق}{م} - \frac{ق}{لا} = \frac{ق}{فر ما}$ جم لا فر لا = جم ما فر ما
تکمیل کرنے سے ربط جب لا = جب ما + لا
حاصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

مثال ۲۔ اگر $\frac{لا + ا}{ا + م} = \frac{لا}{ما} - \frac{لا}{فر لا}$

تو $(\frac{لا}{ا} + \frac{ا}{م}) - \frac{لا}{لا} = (\frac{لا}{ما} + \frac{ما}{ا}) - \frac{لا}{فر لا}$

اس لئے $\frac{لا}{ا} + \frac{ا}{م} - \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{ما} + \frac{ما}{ا} - \frac{لا}{فر لا}$
جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو
۱۔ لا جم ما فر لا = ما جم لا فر ما

$$۲ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱}{۱ + \text{ما} + \text{ما}^۲} - ۳ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}^۲ + \text{ما} + ۱}{۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲} = ۴ -$$

ثابت کرو کہ مثال ۳ کے قبیل منحنیات کا ہر ایک رکن مثال ۲ کے ہر رکن کو علی القوانم قطع کرتا ہے۔

$$۵ - \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} + ۱}{\text{لا} + ۱} (۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲)$$

$$۶ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} + ۱} + \frac{\text{لا}^۲ - ۱}{\text{لا} + ۱}$$

۷ - ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جن میں عماد کا مربع سمتی نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے یا تو دائرے ہیں یا قائم زائد۔

۸ - ثابت کرو کہ ایک ایسا منحنی جس کے کسی نقطہ پر کا ماس اس نقطہ کے سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ (عمہ) بنائے صرف اس جہت سے متعلق ہو سکتا ہے۔

۹ - اُن منحنیات کی مساواتیں معلوم کرو جن میں

(۱) کارٹینری زیر ماس مستقل ہو

(۲) کارٹینری زیر عماد مستقل ہو

(۳) قطبی زیر ماس مستقل ہو

(۴) قطبی زیر عماد مستقل ہو

۱۰ - اُس منحنی کی کارٹینری مساوات معلوم کرو جس کے ماس کا طول مستقل ہو۔

صورت دوم - خطی مساواتیں

حسب ذیل شکل کی مساوات

$$\text{ما} + \text{ف} + \text{ق} + \text{ک} + \dots + \text{ک} = \text{ر}$$

جہاں $F = Q \dots k$ ، R متغیر Δ کے تفاعل یا مستقل مقدر ہیں
 ہیں خطی مساوات کہلاتی ہے، اس مساوات کی خصوصیت یہ ہے
 کہ اس میں تفرقی سروں کی ایک سے بڑی قوت شریک نہیں ہوتی
 فی الحال چونکہ ہم پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر غور کر رہے
 ہیں، اس لئے خطی مساوات کی صورت زیر بحث یہ ہوگی

اگر اس کے دونوں جانب $\frac{1}{Q}$ سے ضرب دیدیا جائے
 تو مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{F}{Q} = (Ma + Q) \quad \text{یا} \quad Q = \frac{F}{Q} - Ma$$

$$\text{پس } Ma + Q = \frac{F}{Q} \quad \text{یا} \quad Q = \frac{F}{Q} - Ma$$

یہ Δ کا باہمی ربط تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس میں ایک
 اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مطلوبہ حل ہے۔

جزو ضربی $\frac{F}{Q}$ کے ساتھ ضرب دینے سے مساوات

کے دائیں جانب کا رکن پورا تفرقی سر ہو جاتا ہے، اس لئے اسے

$$\text{”شکل جزو ضربی“ کہتے ہیں۔}$$

$$\text{مثال ۱۔ } Ma + Q = \frac{F}{Q} \quad \text{یا} \quad Q = \frac{F}{Q} - Ma$$

شکل جزو ضربی یہاں $\frac{F}{Q}$ یا $\frac{F}{Q}$ ہے اور اس لئے مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{F}{Q} = (Ma + Q) \quad \text{یا} \quad Q = \frac{F}{Q} - Ma$$

$$\text{یا } Ma + Q = \frac{F}{Q} \quad \text{یا} \quad Q = \frac{F}{Q} - Ma$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۱ + ۱ - \frac{۲۷}{۲} = ۱$$

$$\text{مثال ۲ - } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{۱}{۱} = ۱ \text{ لا کو مکمل کر دو۔}$$

اس جگہ شکل جزو ضربی ہو کر $\frac{۱}{۱} \text{ فرلا} = ۱ \text{ ہو لوگ لا} = ۱$ ہے اور مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} (لا ما) = لا^۳$

$$\text{اور لا ما} = \frac{لا^۳}{۱} + ۱ = ۱ \text{ یا } \frac{لا^۳}{۱} + \frac{۱}{۱}$$

۸۔ ایسی مساواتیں جو خطی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں

کئی مساواتیں جو دیکھنے میں خطی شکل

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ن ما = ق$$

کی نہ ہوں متغیروں کو بدلنے سے فوراً اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں۔
ایک مشہور صورت ذیل میں مندرج ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ن ما = ق ما^۴$$

$$\text{یا } ما^۴ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ن ما^۵ = ق$$

$$\text{رکھو } ما^۵ = ی$$

$$\text{تو } ما^۵ \text{ فرما} = \frac{\text{فری}}{۱-۱}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + (۱-ن) ی = ق (۱-ن)$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$y = (1-n)k + n = (1-n)k + n$$

یعنی $y = (1-n)k + n$ فرما

$$y = (1-n)k + n$$

مثال ۱۔ $\frac{y}{n} + \frac{y}{n} = 1$ کو تکمیل کرو

یہاں $y = \frac{1}{2}$ رکھنے سے

$$1 = \frac{y}{n} + \frac{y}{n}$$

$$1 = \frac{y}{n} + \frac{y}{n}$$

اور چونکہ $y = \frac{1}{2}$ ہے تو $\frac{1}{2} = \frac{1}{n}$ سے $n = 2$ ہے

اس لئے $\frac{y}{n} = \left(\frac{y}{n}\right) = \frac{1}{2}$

یعنی $\frac{y}{n} = \frac{1}{2}$ سے $y = \frac{1}{2}$ ہے

یعنی $\frac{y}{n} = \frac{1}{2}$ سے $y = \frac{1}{2}$ ہے

مثال ۲۔ مساوات $\frac{y}{n} + \frac{y}{n} = 1$ کو تکمیل کرو
 جم y پر تقسیم کرنے سے

قط $y = \frac{1}{2}$ سے $y = \frac{1}{2}$ ہے
 رکھو $y = \frac{1}{2}$ سے $y = \frac{1}{2}$ ہے

$$\text{تب } \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + {}^2\text{لا می} = {}^3\text{لا}$$

شکل جزو ضربی نوکہ ${}^2\text{لا فرلا}$ ہے اس لئے

$$\text{می نو لا} = \text{کی لا نو لا} \text{ فرلا} + 1$$

فرض کر دو کہ ${}^2\text{لا} = \text{سہ}$

تب ${}^2\text{لا فرلا} = \text{فرسہ}$

$$\text{پس } \text{کی لا نو لا فرلا} = \frac{1}{\text{فر}} \text{ کی سہ نو سہ فرسہ}$$

$$= \frac{1}{\text{فر}} \text{ نو سہ (سہ - ۱)}$$

$$\text{پس مس ما} \times \text{نو لا} = \frac{1}{\text{فر}} \text{ نو لا} ({}^2\text{لا} - 1) + 1$$

جو مساوات مفروضہ کا حل ہے۔
ظاہر ہے کہ اس قسم کی مساواتوں کو خطی (یا کسی اور معلومہ) صورت میں لانے کے لئے بڑی فراست اور تیز فہمی کی ضرورت ہوگی۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمل کرو

$$1- (1+{}^2\text{لا}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{نو سہ لا} \quad 2- \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{جب ب لا}$$

$$3- \frac{\text{فر ل}}{\text{فر ط}} + \frac{\text{ل}}{\text{ط}} = \text{ا ط ن} \quad 4- \frac{\text{فر ل}}{\text{فر ما}} + \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{ما}$$

$$5- (1+{}^2\text{لا}) + ({}^2\text{لا} - \text{نو لا}) = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad 6- \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \frac{\text{نو لا}}{\text{لا}} \right) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = 1$$

۷۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۷ کے حل میں کوئی زیادہ عمومیت پیدا نہیں ہوتی اگر مشکل جزو ضربی ہو کہ فرلا کے حاصل کرنے میں قوت نامکے ساتھ ایک مستقل کا اضافہ کر دیا جائے۔

۸۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن میں کارٹینری زیر عماد ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کا مربع۔
ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

$$9 - \frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a} \quad 10 - \frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a} \quad 11 - \frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a}$$

$$11 - \frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a}$$

$$12 - \frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a} \quad 13 - \frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a}$$

$$13 - \frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a}$$

$$13 - \frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a}$$

۱۵۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن کے سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماد کے متکافوں کا مجموعہ مستقل ہو۔

۱۶۔ ایسے منحنیات کے قبیل کی قطبی مساوات معلوم کرو جن میں سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماد کا مجموعہ ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کی 'ن' دیں قوت۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ ایسے منحنی جن میں انحناء کا نیم قطر ایسے بدلتا ہو جیسے عماد پر کے عمود کا مربع ایک ایسی جماعت سے تعلق رکھتے ہیں جس کی پائیں مساوات $\frac{f}{a} = \frac{b}{a} + \frac{f}{a}$ ہو کہ

ہے جہاں ک ایک معلومہ اور ۱ اختیاری مستقل ہے۔

۱۸۔ ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

$$(۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱}{لا} + \frac{فرما}{فرلا} \quad (۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} = ۱ + \frac{فرما}{فرلا} = قو جب بلا$$

$$(۳) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{مسما}{لا+۱} = (۱+لا) قو قطا$$

$$(۴) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{ن(دما)}{ن(دما)} = قه(لا) قه(لا) \frac{ن(دما)}{ن(دما)}$$



باب دوم

پہلے رتبہ کی مساواتیں (مسل)
تجانس مساواتیں - ایک حرف غائب
کلیروی صورت

۹- صورت سوم - متجانس مساواتیں -
جو مساواتیں لا، ما میں تجانس ہوں وہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$\text{لا} \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} , \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) =$$

(د) اگر ممکن ہو تو اس صورت میں ہم مساوات کو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لئے
حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح اس شکل کا نتیجہ حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{فہ} \left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}} \right)$$

اس میں رکھو ما = ولا

$$\text{تو حاصل ہوگا } \text{ولا} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{فہ} (د)$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرو}}{\text{فہ} (د) - \text{ولا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

اس طرح متغیر الگ ہو جاتے ہیں اور مساوات کامل صورت اول کی

تحت میں آجاتا ہے۔

$$\text{پس } \text{لوک } \frac{\text{فر}}{\text{لا}} = \text{فر} \text{ (دو)۔ و}$$

(ب) لیکن اگر $\frac{\text{فر}}{\text{لا}}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو مساوات کو $\frac{\text{فر}}{\text{لا}}$ کے لئے حل کرنا چاہئے، اس طرح $\frac{\text{فر}}{\text{لا}}$ کے لئے ع رکھنے سے

$$\text{ما} = \text{لا} \text{ فہ (ع) } \dots \dots \dots (۱)$$

بمطابق لا کے تفرق کرنے سے

$$\text{ع} = \text{فہ (ع) + لا فہ (ع) } \frac{\text{فر}}{\text{لا}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فر}}{\text{لا}} = \frac{\text{فہ (ع) فر}}{\text{ع - فہ (ع)}}$$

اس مساوات کو تکمیل کرنے سے ہم لا کو ع کے تفاعل اور ایک اختیاری مستقل کی قوم میں بیان کر سکتے ہیں

یعنی $\text{لا} = \text{فہ (ع) } \dots \dots \dots (۲)$ فرض کرو
ع کو این مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنے سے حل مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ (لا + ما) } \frac{\text{فر}}{\text{لا}} = \text{لا}$$

$$\text{یہاں } \frac{\text{فر}}{\text{لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{لا + ما}}$$

اور $\text{ما} = \text{لا}$ رکھنے سے

$$\text{لا } \frac{\text{فر}}{\text{لا}} = \text{و} + \frac{\text{و}}{\text{لا + و}}$$

$$یا لا فرد = - \frac{۳}{۱ + ۲}$$

$$۲ = \frac{فرد لا}{۱} = - \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} \right) فرد$$

$$یا لوک لا = \frac{۱}{۳} - لوک و$$

$$یا ا و = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۲ - فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

$$\frac{۱}{۲} = \frac{و ا}{فرد لا} + \left(\frac{فرد ا}{فرد لا} \right)$$

$$یعنی ۱ = لا (ع + ع')$$

$$تب ع = (ع + ع') لا + (ع + ع') \frac{فرد ع}{فرد لا}$$

$$یا \frac{فرد لا}{۱} + \left(\frac{۱}{ع} + \frac{۲}{ع'} \right) فرد ع =$$

$$جس سے حاصل ہوتا ہے لوک لا + ۲ لوک ع - ع = \frac{۱}{ع} =$$

یعنی لا ع' = ع

$$\begin{cases} ع - ع' = ع \\ لا ع' = ع \end{cases}$$

اور

کاع حاصل استقاط حل مطلوب ہے۔

$$یہ حل استقاط ہے لوک \left\{ \frac{۱}{۳} - \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} \right) \right\} = \frac{۱}{۲} \pm ۱ \pm \left\{ \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} \right\}$$

لیکن اگر جبر یہ طریق پر ع کو سا قط کرنا ممکن نہ ہو یا اگر سا قط کرنے پر ایک بے دھنگا سا نتیجہ حاصل ہو تو عام طور پر ع' والی ان مساواتوں

کو بغیر بدلے اسی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں، اور انہیں ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کرتے ہیں جن کا 'ع' حاصل استقاط تفرقی مساوات کا حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱- \frac{۹}{۹+۵} = \frac{۹}{۹+۵} \quad ۲- (۹+۵) = (۹+۵) \quad \frac{۹}{۹+۵}$$

$$۳- ۹ = \frac{۹}{۹+۵} \quad ۴- ۹ = \left[\frac{۹}{۹+۵} + \left(\frac{۹}{۹+۵} \right) \right]$$

$$۵- ۹ = \left\{ ۱ + \left(\frac{۹}{۹+۵} \right) + ۹ + \frac{۹}{۹+۵} + ۹ \right\}$$

۱۰- خاص صورت

$$\text{مساوات } \frac{۹}{۹+۵} = \frac{۹+۵+۹}{۹+۵+۹} \text{ آسانی سے متجانس شکل میں}$$

اس طرح لائی جاسکتی ہے

$$\text{اس میں رکھو } \begin{cases} ۹ = ۹ + ۵ + ۹ \\ ۹ = ۹ + ۵ + ۹ \end{cases} \text{ جہاں 'ع' متغیر ہیں اور}$$

۹، ۹، ۹ مستقل۔

$$\text{تب } \frac{۹}{۹+۵} = \frac{۹+۵+۹}{۹+۵+۹} + \frac{۹}{۹+۵} + \frac{۹}{۹+۵} + \frac{۹}{۹+۵}$$

$$\text{اب ۹، ۹، ۹ کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ } \begin{aligned} ۹ &= ۹ + ۵ + ۹ \\ ۹ &= ۹ + ۵ + ۹ \end{aligned}$$

$$\text{پس } \frac{۹}{۹+۵} = \frac{۹}{۹+۵} = \frac{۹}{۹+۵}$$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرضاً}} = \frac{\text{ا + ضا + ب عا}}{\text{ا + ضا + ب عا}}$$

یہ مساوات متجانس ہے، اس میں ہم رکھ سکتے ہیں $\text{عا} = \text{رضا اور}$
تغیر حسب سابق الگ ہو سکتے ہیں۔

۱۱۔ لیکن ایک صورت میں ع ، ک اس طرح منتخب نہیں ہو سکتے

$$\text{یعنی جبکہ} \quad \frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

اس صورت میں فرض کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{م اور ا + لا + ب م} = \text{عا}$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \left(\frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} - \text{ا} \right)$$

$$\text{پس} \quad \left(\frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} - \text{ا} \right) \text{ب} = \frac{\text{عا + ج}}{\text{م عا + ج}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} = \frac{\text{ا م + ب (عا + ا + ج + ب ج)}}{\text{م عا + ج}}$$

$$\text{اور فرلاً} = \frac{\text{م عا + ج}}{\text{ا م + ب (عا + ا + ج + ب ج)}} \text{فرعاً}$$

تغیر اب الگ ہو سکتے ہیں اور مساوات کا مکمل عمل میں آ سکتا ہے۔
۱۲۔ ایک اور صورت قابل توجہ ہے یعنی

$$\frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} = \frac{\text{ا + لا + ب م + ج}}{\text{ب - لا + ب م + ج}}$$

چہاں شمار کنندہ میں ما کا سر نسب نامہ لا کے سر کے مساوی
اور مختلف العلامت ہے۔

اس صورت میں مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\text{(ا + لا + ج) فرلاً + ب (ما فرلاً + لا فرلاً) = (ب م + ج) فرماً}$$

جو ایک "ٹھیک یا حاضر" تفرقی مساوات ہے، اس کا تکمیل ہے
 $۱ لا + ۲ ج لا + ۲ ب لا ما = ۲ ب ما + ۲ ج ما + م$
 جہاں م اختیاری مستقل ہے۔

مثال ۱۔ تکمیل کرو $\frac{۲ لا + ۳ ما - ۸ کو}{۳ لا + ما - ۳ کو}$

رکھو $لا = ضا + ھ$ ، $ما = عا + ک$

پس $\frac{۲ ضا + ۳ عا + (۲ ھ + ۳ ک - ۸ کو)}{۲ ضا + ۳ عا + (ھ + ک - ۳ کو)}$

ھ اور ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ

$$\begin{cases} ۲ ھ + ۳ ک - ۸ کو = ۰ \\ ھ + ک - ۳ کو = ۰ \end{cases} \text{ یعنی } ھ = ۱، ک = ۲$$

تب $\frac{۲ ضا + ۳ عا}{۲ ضا + عا}$ اب رکھو $عا = و$ ، $ضا = تب$

$$و + ضا = \frac{۲ + ۳ و}{۱ + و}$$

$$- ضا = \frac{۲ و - ۲ - و}{۱ + و} = \frac{۲ + ۳ و}{۱ + و}$$

$$- ضا = \frac{۱ + و}{۳ - (۱ - و)}$$

$$= \left[\frac{۱ - و}{۳ - (۱ - و)} + \frac{۱}{۳} \right] \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۱ + و} \right) \text{ اور}$$

$$۵۔ \text{ لوک } ضا = \frac{۱}{۳} \text{ لوک } \{ ۳ - (۱ - و) \} + \frac{۱}{۳} \text{ لوک } \frac{۱ - و - ۱}{۳ + ۱ - و}$$

$$\text{جہاں } ضا = لا - ۱ \text{ اور } و = \frac{۲ - ۶}{۱ - ۵}$$

مثال ۲۔ تکمیل کرو $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۱ - لا + ما}$ کو
فرض کرو کہ $لا + ما = سی$ ، تب

$$\frac{فری}{فرلا} = +۱ = \frac{سی}{۱ - سی} = \frac{۱ - سی}{۱ - سی}$$

اور $فرلا = \frac{۱ - سی}{۱ - سی} فری = \frac{۱}{۲} [۱ - \frac{۱}{سی}] فری$

∴ $لا = \frac{۱}{سی} - \frac{۱}{۲}$ لوک $(۱ - سی) + ۱$
جہاں $سی = لا + ما$

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو۔

۱۔ $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{ما۲ + لا۳}$ ۲۔ $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{۳ - لا + ما۲}$

۳۔ $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{۳ - لا + ما۳}$ ۴۔ $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما - ب}{ب + لا + ما - ب}$

۵۔ $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما + ۱}{۱ - لا + ما}$ ۶۔ $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما + ۱}{۱ + ما۲ + لا۲}$

۷۔ $(لا۲ + ما۳ - ۵) \frac{فرما}{فرلا} + ۳ لا + ما۲ - ۵ = ۰$

۸۔ $(لا۲ + ما۳ - ۵) \frac{فرما}{فرلا} + ۲ لا + ما۳ - ۱ = ۰$

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ 'لا' ما جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ

$$\frac{فرما}{فرت} = لا + ما + گ$$

$$\frac{و}{ر} = - (ھ + لا + ب + ما + ف)$$

ہمیشہ ایک مخروطی تراش پر واقع ہوتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ عام متجانس مساوات $ف (\frac{ما}{لا} ، \frac{و}{ر}) = ۰$ کے حل ہمیشہ متشابہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ $ف (\frac{ما}{لا} ، \frac{و}{ر}) = ۰$ کے حل 'لا'، 'ما' اور

ایک مستقل کی کسی خاص قوت میں متجانس ہیں۔ برعکس اس کے اگر ایک قبیل منحنیات کے کسی رکن کی نمونہ کی مساوات 'لا'، 'ما' اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت کے لحاظ سے متجانس ہو تو اس قبیل کی تفرقی مساوات بھی متجانس ہوگی اور قبیل کے منحنی سب ایک دوسرے کے متشابہ ہوں گے۔

۱۲۔ بتاؤ کہ 'ا'، 'ب' کی مختلف قیمتوں کے لئے منحنیات کے قبائل ذیل میں سے کون کون سے متشابہ جٹوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$(۱) ما = ۲ لا \quad (۲) ما = ۱ جمز لا$$

$$(۳) \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \quad (۴) ۲ = ۱ لوک لا$$

$$(۵) ب مس = \frac{لا}{ا} = ۱ + ما \quad (۶) لا + ما = ۳ لا ما$$

۱۳۔ صورت چہارم۔ ایک حرف غائب

لا غائب

(۱) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں لا موجود نہیں ہے، اس صورت

میں مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$ف(ما، \frac{فرما}{فرلا}) = ۰$$

اسے ہم $\frac{فرما}{فرلا}$ یا ما کے لئے جیسا مناسب ہو حل کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کیا جائے تو مساوات کی صورت یہ ہوگی

$$\frac{فرما}{فرلا} = ف(ما)$$

$$تب \quad فرلا = \frac{فرما}{ف(ما)}$$

$$اور تکمیل ہے لا = مک \frac{فرما}{ف(ما)} + ۱$$

(۲) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو ہم ما کے لئے حل کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوگا ما = ف(ع) جہاں ع تفرقی سر $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے لکھا گیا ہے۔

بلحاظ لا کے جو مساوات میں موجود نہیں تفرق کرنے سے

$$ع = ف(ع) \frac{فرع}{فرلا}$$

$$یعنی \quad فرلا = \frac{ف(ع) فرع}{ع}$$

$$پس \quad لا = مک \frac{ف(ع) فرع}{ع} + ۱$$

تمکمل کا عمل پورا کرنے پر ہم x کو اس مساوات اور $ma = fh$ (ع) سے سا قفا کرتے ہیں، اس طرح مساوات مفروضہ کا 'حل حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ما غائب

(ب) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں ma موجود نہیں ہے،

اس صورت میں اس کی شکل ہوگی $f(لا، \frac{ma}{f}) = 0$ ۔

چونکہ $\frac{ma}{f} = \frac{1}{\frac{f}{ma}}$ اسلئے اوپر کی مساوات اس طرح بھی لکھی

جاسکتی ہے $سا(لا، \frac{f}{ma}) = 0$ ۔

پس اگر ma کو متغیر متبوع مانا جائے تو دفعہ ماقبل کی تشریح کا اطلاق اس پر بھی ہوتا ہے اور وہ اس طرح۔

(۱) بشرط سہولت $\frac{f}{ma}$ کے لئے حل کرنے سے اس طرح کا نتیجہ ماصل ہوتا ہے

$$\frac{f}{ma} = fh(لا)$$

$$تب \quad \frac{f}{ma} = fh(لا)$$

$$اور تمکلی ہے \quad ma = f + \frac{f}{fh(لا)}$$

(۲) لیکن اگر $\frac{f}{ma}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو

لا کے لئے حل کرنے سے ہم اس طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں $\text{لا} = \text{فہ}(\text{ق})$
 جہاں 'ق' $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ کے لئے لکھا گیا ہے۔ بلحاظ ما کے جو مساوات
 میں موجود نہیں ہے تفرق کرنے سے

$$\text{ق} = \text{فہ}(\text{ق}) \frac{\text{ق}}{\text{ق}}$$

اس طرح $\text{ق} = \text{فہ}(\text{ق}) \frac{\text{ق}}{\text{ق}}$

اور $\text{ما} = \text{ق} \frac{\text{ق}}{\text{ق}} + \text{ق}$

تکمل کا عمل پورا کرنے پر ہمیں 'ق' کو اس مساوات اور $\text{لا} = \text{فہ}(\text{ق})$
 سے ساقط کرنا چاہئے، اس طرح تفرقی مساوات کا حل مطلوب
 حاصل ہوگا۔

طالب علم دیکھے کہ دونوں صورتوں میں خواہ لا موجود نہ ہو
 یا ما، ہم حتی الامکان سب سے پہلے $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ کے لئے حل کرنے کی
 کوشش کرتے ہیں، لیکن اگر یہ عمل تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو باقی
 ماندہ حرف کے لئے حل کرنے کے بعد ہم اُس حرف کے لحاظ
 سے جو مساوات میں موجود نہ ہو تفرق کرتے ہیں، پس
 ہر صورت میں جو حرف مساوات میں موجود نہیں ہوتا اُسے
 متغیر متبوع خیال کیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ مساوات $\text{ا} + \text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ کو تکمل کرو

اسجگہ $\frac{\text{ق}}{\text{ق}} = \frac{\text{لا}}{\text{ا} + \text{لا}}$ یعنی $\text{ق} = (\text{ا} + \frac{\text{ق}}{\text{ق}}) \text{ق}$

اور $ما = \frac{لا}{۲} + لوک لا + ۱$ حل مطلوب ہے

مثال ۲۔ حل کرو $لا \frac{ما}{۲} = ۱ + (\frac{ما}{۲لا})$ کو۔
مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$لا = ق + \frac{۱}{ق} \quad \text{جہاں } ق = \frac{ما}{۲لا}$$

یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے۔ اس کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$ق = (۱ - \frac{۱}{ق}) \frac{ما}{۲}$$

$$یا \frac{ما}{۲ق} = \frac{۱}{ق} - \frac{۱}{ق}$$

$$\text{اور } ما = لوک ق + \frac{۱}{۲ق}$$

اس مساوات اور مساوات $لا = ق + \frac{۱}{ق}$ کا
ق، حاصل استقاط حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$۱۔ \frac{ما}{۲لا} + ما = \frac{۱}{۲} \quad ۲۔ \frac{ما}{۲لا} = لا + \frac{۱}{لا}$$

$$۳۔ \sqrt{لا + ۱} = \frac{ما}{۲لا} + لا = ۰$$

$$۴۔ (۲لا + لا) \frac{ما}{۲} = ۱ + ۲لا$$

$$۵ - (۲ + ۱ + ۱) \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = ۱ + ۱ + ۱$$

$$۶ - ۱ = جب (۱) - (۱) \frac{۱}{۱} = جم (۱) \frac{۱}{۱}$$

$$۷ - ۱ = ۱ (۱) \frac{۱}{۱} + ب (۱) \frac{۱}{۱}$$

$$۸ - لا (۱) \frac{۱}{۱} = ۱ + ب \frac{۱}{۱}$$

$$۱۵ - صورت پنجم - کلیدی صورت ۱ = لا \frac{۱}{۱} + ف (۱) \frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۱}{۱} \frac{۱}{۱} کے لئے ع لکھنے سے$$

$$۱ = ع + لا + ف (ع) \dots \dots \dots (۱)$$

بحفاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$ع = ع + لا \frac{ع}{۱} + ف (ع) \frac{ع}{۱}$$

$$یا \{ لا + ف (ع) \} \frac{ع}{۱} = \dots \dots \dots (۲)$$

$$جس سے \frac{ع}{۱} = . یا لا + ف (ع) = .$$

$$اب \frac{ع}{۱} = . سے حاصل ہوتا ہے ع = ج جہاں ج مستقل$$

پس ۱ = ج + لا + ف (ج) تفرقی مساوات کا ایک حل ہے جہاں ج مستقل ہے۔
نیز اگر ع کو مساوات

لا + فَا (ع) = (۳)
 سے لا کی رقوم میں معلوم کیا جائے تو ع ، لا کا ایک تفاعل ہوگا
 اور اگر ع کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کی جائے اور جو
 ایک ہی بات ہے کہ ع کو مساواتوں (۱)، اور (۳) سے ساقط کیا
 جائے تو ہمیں لا ، ما میں ایک ربط حاصل ہوگا اور یہ بھی تفرقی
 مساوات کو پورا کرے گا۔
 اب ع کو مساواتوں

$$ما = ع لا + فَا (ع)$$

$$= لا + فَا (ع)$$

سے ساقط کرنا وہی بات ہے کہ ج کو مساواتوں

$$ما = ج لا + فَا (ج)$$

$$= لا + فَا (ج)$$

سے ساقط کیا جائے یعنی ج کی مختلف قیمتوں کے لئے خط

$$ما = ج لا + فَا (ج) \text{ کا لگاتار معلوم کیا جائے۔}$$

اس لئے مساوات مفروضہ کے حل دو طرح کے ہیں۔

(۱) خطی حل جسے ”مکمل ابتدائی“ کہتے ہیں اور جس میں ایک اختیاری
 مستقل شامل ہوتا ہے۔

(۲) لگاتار یا ”ناور حل“ جس میں کوئی اختیاری مستقل شامل

نہیں ہوتا اور نیز یہ حل مکمل ابتدائی سے اختیاری مستقل کی جگہ

کوئی خاص عددی قیمت مندرج کرنے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔

ان حلوں کے درمیان ہندسی ربط یہ ہے کہ کامل ابتدائی

خطوط کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے اور ناور حل ان کے

لگاتار کو۔ ناور حلوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر

ہے اور مزید معلومات کے لئے طالب علم بڑے رسالوں کا مطالعہ

کریں۔

مثال - حل کرو $ما = ع لا + \frac{1}{ع}$

کلیدی قاعدہ کی رو سے کامل ابتدائی ہے

$$ما = م لا + \frac{1}{م}$$

لغات یا نادر حل اوپر کی مساوات اور

$$= لا - \frac{1}{م}$$

کے درمیان م کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا۔

نادر حل ہے $ما = م لا$

طالب علم فوراً پہچان لیگا کہ نادر حل $ما = م لا$

مکانی کی مساوات ہے اور کامل ابتدائی $ما = م لا + \frac{1}{م}$

مکانی کے محاس کی مساوات ہے۔

امثلہ

ذیل کی ہر ایک صورت میں کامل ابتدائی اور لغاتی حل معلوم کرو

$$۱۔ ما = ع لا + ع^۲ \quad ۲۔ ما = ع لا + ع^۳$$

$$۳۔ ما = ع لا + ع^۴ \quad ۴۔ ما = ع لا + ع^۵ + ع^۶$$

$$۵۔ ما = (لا - ع) (ع - ع^۲) \quad ۶۔ (ما - ع لا) (ع - ع^۲) = ع$$

$$۱۶۔ مساوات ما = لافہ (ع) + سا (ع) \dots (۱)$$

بھی پہلے بلحاظ لا کے تفرق کرنے پھر ع کو متغیر متبوع خیال

کرنے سے حل ہو سکتی ہے۔

تفرق کرنے سے

$$ع = فہ (ع) + لا فہ (ع) \frac{ع}{ع} + ساد (ع) \frac{ع}{ع}$$

$$\text{جس سے } \frac{ع}{ع} + لا \frac{فہ (ع)}{ع} = \frac{ساد (ع)}{ع} - فہ (ع) - ع$$

یہ ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$لا \frac{فہ (ع)}{ع} - ع = ع - \frac{ساد (ع)}{ع} \quad \text{فہ (ع) } \frac{ع}{ع} - ع = ع + ۱$$

اب اگر مساواتوں (۱) اور (۲) سے ع کو ساقط کیا جائے تو اصلی مساوات کا کامل ابتدائی حاصل ہوگا۔

$$\text{مثال۔ حل کرو} \quad ۲ع + لا = ۲ع + ع \dots (۱)$$

$$\text{تفرق کرنے سے } ع = ۲ع + لا \frac{ع}{ع} + ع \frac{ع}{ع}$$

$$\text{یا } ع \frac{ع}{ع} = ۲ع + لا$$

$$\text{یعنی } \frac{ع}{ع} = (ع + لا) - ۲ع$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $ع + لا = ۲ع - ۲ع$ ۔ (۲)۔۔۔۔۔
 ان مساواتوں کا 'ع' حاصل اسقاط اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔ پہلے ع کے لئے مساوات (۱) کو حل کرو پھر (۲) میں مندرج کرو۔ لیکن اگر نتیجہ کو منطق صورت میں پیش کرنا مطلوب ہو تو اس طرح عمل کرو

$$\text{مساوات (۲) سے } ۲ع + لا = ۲ع + ع$$

$$(۱) \text{ سے } ع + ۲ع + لا = ع + ۲ع$$

$$\text{اس لئے } ع + لا = ۲ع + ع$$

اس مساوات اور $ع + ۲ع + لا = ع + ۲ع$ سے حل پنی ضرب کے

ذریعہ

$$\frac{1}{62 + 2^2} = \frac{ع}{3 - 62} = \frac{ع^2}{62 + 2^2}$$

جس سے حاصل استقاط ہے $۳(۳ + ۱۳) (۱۳ + ۱۳) = (۱۳ + ۱۳) (۱۳ - ۳)$

۱۷- ع کو ساقط کرنے کا جبریہ عمل کئی صورتوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے، ایسی صورتوں میں استقاط کا عمل فی الحقیقت نہیں کیا جاتا لیکن مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کیا جاتا ہے جن کا ع، حاصل استقاط مساوات زیر بحث کا حل مطلوب ہوتا ہے

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$\begin{aligned} ۱- ۱۳ + ع^۲ &= ۱۳ - ۱۳ + ع^۲ \\ ۲- ۱۳ + ع(ع + ۱۳) &= ۱۳ - ۱۳ + ع(ع + ۱۳) \\ ۳- ۱۳ + ع^۲ &= ۱۳ - ۱۳ + ع^۲ \\ ۴- ۱۳ + ع(ع + ۱۳) &= ۱۳ - ۱۳ + ع(ع + ۱۳) \\ ۵- ۱۳ + ع(ع + ۱۳) &= ۱۳ - ۱۳ + ع(ع + ۱۳) \\ ۶- ۱۳ + ع(ع + ۱۳) &= ۱۳ - ۱۳ + ع(ع + ۱۳) \end{aligned}$$

۸- ایک منحنی کے نقطہ ن پر کا ماس محور و ما سے ت پر ملتا ہے اور و ت اس زاویہ میلان کے ماس کے متناسب ہے جو ن ت کا ولا کے ساتھ ہے، منحنی کو معلوم کرو۔ [آکسفورڈ ۱۸۸۸ء]
۹- جو منحنی یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ حوالہ کے محوروں پر ان کے ماسوں کے مقطوعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

کامل ابتدائی معلوم کرنے سے ماس کی مساوات اور نادر حل سے منحنیات زیر بحث کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۔ وہ منحنی معلوم کرو جن کی صورت میں اس مثلث کا رقبہ جو حماس اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنا ہے مستقل ہو۔

۱۱۔ جن منحنیات میں حماس کے اس حصہ کا طول جو حوالہ کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہو ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو، کامل ابتدائی اور نادر حل کو حاصل کرو اور ہر ایک کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

۱۲۔ ایک منحنی تفرقی مساوات $ما = ع^2 (لا - ع)$ کو پورا کرتا ہے، نیز اگر $لا = \frac{1}{2} قوع =$ ۔ ما منحنی کی مساوات معلوم کرو [آکسفورڈ ۱۸۸۹ء]

۱۳۔ مساوات ذیل کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو

$$قو^2 (ما - \frac{قو}{لا}) = ج \{ قو^2 + (\frac{قو}{لا})^2 \} \quad [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر $لا^2 = س$ اور $ما^2 = ت$ تو مساوات ذیل

$$لا لا ما ما + (لا^2 - لا ما - ما^2) (ب - ما - لا ما) =$$

کلیروی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔

اس طرح سے اس کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو۔ نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔



باب سوم

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

ٹھیک یا حاضر تفرقی مساواتیں

۱۸۔ دوسرے رتبہ کی مساوات

اب ہم دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کریں گے

فہ (لا، ما، کم، با) =

اس کے حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے، مگر اس کی خاص صورتوں کا حل کرنا چنداں مشکل نہیں۔

۱۹۔ صورت اول فرض کرو کہ یہ خطی مساوات ہے

اسکی نمونہ کی صورت ہوگی $\frac{2}{3} \text{ ف} + \frac{1}{4} \text{ ق} = \text{ما}$

جہاں ف، ق، ر متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

اس مساوات کو حل کرنے کی تدبیر یہ ہے کہ پہلے ر کو حذف کر کے مساوات

$\frac{2}{3} \text{ ف} + \frac{1}{4} \text{ ق} = \text{ما}$

کا کوئی حل معلوم کیا جائے یا ویسے ہی بھانپ لیا جائے۔

فرض کرو کہ ما = فہ (لا) اس کا ایک حل ہے، اصلی مساوات میں رکھو

ما = سی فہ (لا)

ما = سی فہ (لا) + سی فہ (لا)

$$۲ = می فہ (لا) + ۲ می فہ (لا) + می فہ (لا)$$

ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$می فہ (لا) + ۲ می فہ (لا) + می فہ (لا)$$

$$+ ف می فہ (لا) + ف می فہ (لا)$$

$$+ ق می فہ (لا) = ۱$$

لیکن فہ (لا) + ف فہ (لا) + ق فہ (لا) = حسب مفروض

$$اس لئے می + \left\{ \frac{۲ فہ (لا)}{فہ (لا)} + ف \right\} می = \frac{۱}{فہ (لا)}$$

جو می کے لئے خطی مساوات ہے
شکل جزو ضربی ہے

$$۲ (ف + ۲ فہ (لا)) می + ۲ فہ (لا) = ۱$$

اور پہلا مکمل ہے

$$می \{ فہ (لا) \} ۲ کوکت مرلا = ۲ (ف + ۲ فہ (لا)) می + ۲ فہ (لا) مرلا$$

جس سے دوسرا تکلی اور اس لئے تفرقی مساوات کا حل حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{مثال۔ اس مساوات کو حل کرو } \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\text{یہاں } ۲ = لا مساوات } \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳} = لا ۲ = کا ایک حل ہے$$

اس لئے رکھو ۲ = لا می

$$تب ۲ = لا می + می$$

اور

$$۲ = لا می + ۲ می$$

$$\text{اس لئے } لا می + ۲ می + لا (لا می) - لا (لا می) = لا ۲ = \frac{۲}{۳}$$

$$y + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

اور مکمل جزو ضربی ہے $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)$ ملا یا $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

$$\text{پس } \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{اور } \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{میں سے } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

اور حل مطلوب ہے $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ملا + ب لا

۲۔ صورت دوم۔ ایک حرف غائب

(ا) اگر مساوات میں لا موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\text{تب } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

اس طرح مساوات $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

اور پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

(ب) اگر لا موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\text{تب } \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{ما}$$

اور فہ (لا، ما، لم) = ہو جاتی ہے

$$\text{فہ (لا، ع، فرع)} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} =$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ مساوات ما، م + ما = ۲ ما کو حل کرو۔

یہاں مساوات میں لا موجود نہیں ہے، پس رکھو ما = ع اور ما = ع فرع

$$\text{اس طرح } \text{ما} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} + \text{ع} = ۲ \text{ ما}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} + \frac{۲}{\text{ما}} \text{ع} = ۲ \text{ ما}$$

شکل جزوی ضربی ہے جو کہ $\frac{۲}{\text{فرما}} = ۲ \text{ ما}$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} (\text{ع} \text{ ما}) = ۲ \text{ ما}$$

$$\text{یا } \text{ع} \text{ ما} = \text{ما} + \text{متقل} = \text{ما} + ۱ \text{ (فرض کرو)}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{ما فرما}}{\text{ما} + ۱} = \text{فرلا}$$

$$\text{یا جنر } ۱ = \frac{۲}{۱} = ۲ + ۱$$

$$\text{یعنی } ۱ = ۲ \text{ جنر } (۲ + ۱)$$

مثال ۲۔ حل کرو $۱ + ۲ = ۳$ لا $۱ + ۲ = ۳$ کو
یہاں مساوات میں ماموجود نہیں ہے، پس رکھو $۱ = ۳$

$$\text{اس طرح } ۱ + ۳ = ۴ \text{ لا } ۱ + ۳ = ۴$$

$$\text{یا } \frac{۴}{۱} = \frac{۴}{۱}$$

$$\text{یعنی لوک } ۱ = \text{لوک } ۱ + ۳ + \text{مستقل}$$

$$۱ + ۳ = \frac{۴}{۱} \text{ (فرض کرو)}$$

$$\text{یا } ۱ + ۳ = \frac{۴}{۱} \text{ لا } ۱ + ۳ = ۴$$

$$\text{جس سے حاصل ہوتا ہے } ۱ + ۳ = \frac{۴}{۱} \text{ لا } ۱ + ۳ = ۴ \text{ جنر } ۱ = \frac{۴}{۱} + ۱$$

جہاں ۱ اور ۱ اختیاری مستقل ہیں۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ - ۲ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۱ - ۲ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۱ - ۲ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۱ - ۲ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۱ - ۲ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۱ - ۲ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$+ ف_1 و_1 + \dots + ف_2 و_2 + \dots + ف_n و_n = ق$$

ی۔ کاسر ن و + ف و ہے۔

اگر و کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ

$$\frac{ف_1 و_1}{و} = \frac{ف_2 و_2}{و} \text{ یا } و = \frac{ف_1 و_1}{ف_1}$$

تو جس رقم میں $ف_1$ واقع ہوتا ہے وہ خارج ہو جاتی ہے
اسی طرح اگر و کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تفرقی مساوات

$$\frac{ن(۱-۱)}{۲ \times ۱} + (۱-۱) ف_1 و_1 + ف_2 و_2 =$$

پوری ہو تو وہ رقم جس میں $ف_1$ واقع ہوتا ہے خارج ہو جاتی ہے۔
ی کاسر ہے

$$+ ف_1 و_1 + \dots + ف_2 و_2 + \dots + ف_n و_n$$

اگر و کی ایک قیمت معلوم ہو سکے یا ویسے ہی بھانپ لی جا سکے
جو اوپر کے جملہ کو صفر بنادے تو $ی = عا$ اور اس لئے $ی = عا$
اور $ی = عا$ رکھنے سے مساوات کا درجہ بقدر ایک کے

کم ہو سکتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ یہ جملہ شکل میں وہی ہے جو مساوات
معلومہ کے دائیں جانب کا رکن ہے۔

اس لئے اگر مساوات کا کوئی حل ما = و کسی طرح سے معلوم ہو سکے
جبکہ اس کا بائیں رکن خذف کیا جائے تو ما = و $ی$ رکھنے سے اور
پھر $ی = عا$ فرض کرنے سے ہم مساوات کا ایک رتبہ کم کر سکتے ہیں

۲۲۔ صورت آئینی

جیسا اوپر بیان ہوا درجہ دوم کی مساوات

$$م + ف + م + ف + م = ق$$

میں م = نو - ۱ کی ف در لای می مندرج کرنے سے اصلی مساوات

بعض اوقات سادہ صورت

$$م + ف + م = ق$$

میں تبدیل ہو سکتی ہے۔

لیکن اس مساوات کا عام حل ابھی تک نہیں حاصل کیا گیا۔

”ٹھیک“ یا حاضر تفرقی مساوات

$$۲۳۔ اگر $n > 1$ تو $ل^1 = م^1$ - کامل تفرقی ہے$$

اور ما خواہ کچھ ہی ہو یہ مکمل ہو سکتا ہے

کیونکہ اگر $ل^1 = م^1$ کو مانی سے تعبیر کیا جائے تو

$$ل^1 = م^1 = ل^1 - م^1 - (ن - ۱) ل^1 - م^1 = ل^1$$

$$ل^1 = م^1 = ل^1 - م^1 - (ن - ۱) ل^1 - م^1 = ل^1$$

وغیرہ

$$ل^1 = م^1 = ل^1 - م^1 - (ن - ۱) ل^1 - م^1 = ل^1$$

$$اس طرح $ل^1 = م^1 = ل^1 - م^1 - (ن - ۱) ل^1 - م^1 = ل^1$$$

کرفن-۱، ۱ امرلا = فن-۱، ۱ کرفن-۱، ۱ امرلا

ف. م. فرلا = ف. م. - ف. م. + ف. م. فرلا

ف ف-۳ م-۴ = ف-۲ م-۱ + ف-۳ م-۳ ف-۱ م-۲ + ف-۲ م-۳ + ف-۳ م-۴

و غیره و غیره

اس لئے جمع کرنے پر ظاہر ہے کہ اگر

$$f_n - f_{n-1} + f_{n-2} - f_{n-3} + \dots + f_3 - f_2 + f_1 - f_0 = 0$$

تو مساوات مفروضہ حاضیر مساوات ہے اور اس کا پہلا تفرقی ہے

$$(f_1 - f_2 + f_3 - \dots) + (f_2 - f_3 + f_4 - \dots) + \dots$$

$$1 + \int f(x) dx = \dots + \frac{1}{2} (f(x) + f(x)) + \dots$$

مثال کیا مسادات لائیم + ۱۲ لائیم + ۳۶ لائیم + ۲۴ لائیم = جب لا حاضر مسادات ہے ؟

حاضر مساوات کو جانچنے کے طریقہ کے موافق ہم دیکھتے ہیں کہ

ف = ۲۴ لا، ف = ۳۶ لا، ف = ۱۲ لا، ف = ۶ لا

اور ف۔ فی + ف۔ فَ = فِ

معلوم ہوا کہ یہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تکمیل ہے

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{1}{6} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8})$$

$$12 \text{ لا } 6 + 8 \text{ لا } 7 + 6 \text{ لا } 5 = - \text{جم لا } 4 + 1$$

دایاں رکن کامل تفرقی سر ہوگا اگر

$$۱۲ لا^۲ - ۲۴ لا^۲ + ۱۲ لا^۲ = ۰$$

شرط پوری ہوتی ہے، پس دوسرا تکملی ہے

$$(۸ لا^۳ - ۳ لا^۲) + ۴ لا^۲ + ۴ لا = ۰ \text{ جب لا + لا + لا + ب}$$

یا
جسے پھر جانچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن کامل تفرقی سر ہے، پس
تیسرا تکملی ہے

$$لا^۲ + ۴ لا = ۰ \text{ جم لا} + \frac{۱ لا^۲}{۲} + ۴ لا + ج$$

امثلہ

۱۔ ثابت کرو کہ لا^۴ + ۵ لا^۳ + ۶ لا^۲ + ۶ لا + ۱ = ۰ حاضر مساوات

ہے، اسے پورے طور پر حل کرو۔

۲۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$لا^۴ + ۶ لا^۳ + ۶ لا^۲ + ۶ لا + ۱ = ۰ \text{ جب لا} + ۳ لا + ۳ لا + ۱ = ۰$$

۳۔ ذیل کی مساواتوں کے پہلے تکملی معلوم کرو۔

$$(۱) لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۳ لا + ۱ = ۰$$

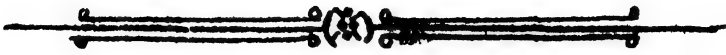
$$(ب) لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۳ لا + ۱ = ۰$$

$$(ج) لا^۴ + ۶ لا^۳ + ۶ لا^۲ + ۶ لا + ۱ = ۰ \text{ کوک لا}$$

۴۔ اگر مساوات ف + ۴ لا + ۴ لا + ۴ لا = ۰ کا ایک شکل جزو ضربی

مہ ہو تو ثابیت کرو کہ مہ ذیل کی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے

$$ف_۱ مہ - ف_۲ مہ + (ف_۱ مہ) \frac{ف_۲}{ف_۱} = (ف_۱ مہ) \frac{ف_۲}{ف_۱}.$$



یہ مساوات کا عام سے عام حل ہے، مساوات کا اس سے زیادہ عام حل نہیں معلوم کیا گیا۔

اس کا حصہ ف (لا) خاص تکمیلی (خ، ک) کہلاتا ہے اور

اس کے باقی ماندہ حصہ کو جس میں ف مستقل شامل ہیں متم تفاعل (م، ت) کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ متم تفاعل اس مساوات کا حل ہے جو اصلی مساوات میں باقی رکن کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر یہ دونوں حل معلوم ہو جائیں تو مساوات کا پورا حل ان کا مجموعہ ہے۔

۲۷۔ دو مشہور صورتیں دو صورتیں ہیں جن کے حل بالعموم آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

- (۱) جب مقادیر ف، ف، ف سب مستقل ہوں
- (۲) جب مساوات کا ذیل کی شکل اختیار کرے

$$لا \frac{لا}{لا} + لا \frac{لا}{لا} + لا \frac{لا}{لا} + + لا \frac{لا}{لا} = ص$$

جہاں لا، لا، لا مستقل ہیں اور ص، لا کا کوئی تفاعل ہے۔

آگے چلکر معلوم ہو گا کہ دوسری صورت کا حل ایک ایسی مساوات کے حل پر موقوف ہو سکتا ہے جو پہلی قسم کے تحت میں آتی ہیں۔

مستقل سروں والی مساواتیں۔ متم تفاعل

۲۸۔ سب سے پہلے ہم اس طرح کی مساوات

$$لا + لا + لا + + لا + لا = ص \quad (۱)$$

مذکورہ کا عام سے عام حل نہیں رہتا۔

اب ہم اسے زیادہ غور سے دیکھتے ہیں

$$\text{فرض کرو کہ } m = m_1 + m_2$$

$$\text{تب } \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n} \quad (2)$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} \right) \quad (3)$$

اب چونکہ $\frac{1}{m}$ اور $\frac{1}{m_1}$ دو بے تعلق اختیاری مقداریں ہیں، اس لئے انہیں ہم دو اور بے تعلق اختیاری مقداروں کی رقوم میں دو ربطوں کے ذریعہ جنہیں ہم اختیار کرنا چاہیں بیان کر سکتے ہیں۔

اولاً $\frac{1}{m}$ کو اتنا بڑا مانو کہ بالآخر حاصل ضرب $\frac{1}{m}$ جہاں m لانتہا کم ہے $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو جو ایک اختیاری محدود مستقل ہے۔

ثانیاً $\frac{1}{m_1}$ کو $\frac{1}{m}$ سے مختلف علامت مانو اور اس کی قیمت اتنی بڑی منتخب کرو کہ $\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}$ ایک اختیاری محدود مستقل $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو۔
اب رقوم

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} \quad (4)$$

m کے معدوم ہونے کی وجہ سے فنا ہو جائیں گی کیونکہ $\frac{1}{m}$ محدود ہے اور مربع خطوط وحنانی کے اندر کا جملہ مستحق ہے اور اس میں m بطور جزو ضربی کے شریک ہوتا ہے۔

پس اگر $m = m_1$ تو رقوم $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$ کی بجائے ہم

$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$ لکھ سکتے ہیں، اس لئے حل مذکور میں اختیار کیا

مستقلات کی تعداد ن ہی رہتی ہے۔ پس اس صورت میں یہ مساوات کا عام حل ہے۔

۳۰۔ تین اصلیں مساوی اب ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں

جبکہ ساوات (۲) کی تین اصلیں مساوی ہوں یعنی $M_1 = M_2 = M_3$
 حسب بالا رقوم $1/2 \omega^2 + 1/2 \omega^2 + 1/2 \omega^2$ کی بجائے ہم

(ب + ب لا) فو لا + لم فو لا کہہ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $m = m + k$

$$\text{تب } \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

پس اِوَمَلا + اِوَمَلا + اِوَمَلا کی بجائے ہم

(ب + ی) فو + (ب + ی) ک + لا فو + یک لا فو

$$+ \frac{k^2 \lambda^2}{m} + \frac{k \lambda}{n} + \dots]$$

رکھ سکتے ہیں اور \bar{b} ، $\bar{b}b$ کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ

$$b + \bar{b} = 1$$

بب + پک = ج

۱ ک = ۲ ج

جہاں ج، ج، ج کوئی اختیاری مستقل ہیں، خواہ ک کچھ ہی ہو

$$(\text{ب} + \text{ل}) \text{فہ} (\text{م}) + \text{ل} \text{فہ} (\text{م}) + \frac{\text{فہ} (\text{م})}{\text{فرم}} + \frac{\text{فہ} (\text{م})}{\text{فرم}} + \dots$$

اب رکھو $\text{ل} + \text{ل} = \text{بم}$ اور $\text{ل} \text{فہ} = \text{بہ}$ جہاں بم اور بہ دو محدود مستقل ہیں۔ جب ہم فہ کو لا انتہا کم کرینگے تو اوپر کے سلسلہ کی باقی رقیں بالآخر معدوم ہو جائیں گی۔

پس $\text{ل} \text{فہ} (\text{م}) + \text{ل} \text{فہ} (\text{م})$ کی بجائے

$$\text{ب} \text{فہ} (\text{م}) + \text{ب} \frac{\text{فہ} (\text{م})}{\text{فرم}}$$

مستم تفاعل میں اختیاری مستقلات $\text{ب}، \text{ب}، \text{ل}، \text{ل}، \dots$

کی وہی تعداد (ن) قائم رہتی ہے جو پہلے تھی۔ اور دفعہ ۳ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ع اصلیں مساوی ہوں یعنی $\text{م} = \text{م} = \text{م} = \text{م} = \dots = \text{م}$

تو رقوم $\text{ل} \text{فہ} (\text{م}) + \text{ل} \text{فہ} (\text{م}) + \dots + \text{ل} \text{فہ} (\text{م})$ کی بجائے ہم

$$\text{ب} \text{فہ} (\text{م}) + \text{ب} \frac{\text{فہ} (\text{م})}{\text{فرم}} + \text{ب} \frac{\text{فہ} (\text{م})}{\text{فرم}} + \dots + \text{ب} \frac{\text{فہ} (\text{م})}{\text{فرم}}$$

رکھ سکتے ہیں جس سے حل کی عام شکل قائم رہتی ہے۔

دفعات ۲۹، ۳۰، ۳۱ کے نتائج اس نتیجہ کی خاص صورتیں ہیں ان میں

$\text{فہ} (\text{م})$ کی صورت $\text{فہ} (\text{م})$ تھی۔

بم و لا جم ب لا + بم و لا جب ب لا کی بجائے

جم و لا جم (ب لا + جم)

رکھ سکتے ہیں جہاں ج، جم اختیاری مستقل ہیں۔

۴۔ مکرر خیالی اصلیں

مکرر خیالی اصلوں کے لئے ہم پہلے کی طرح عمل کر سکتے ہیں کیونکہ یہ ثابت

ہو چکا ہے کہ اگر $م = م$ تو $م و لا + م و لا$ کی بجائے

(ب + ب لا) $م و لا$ لکھا جاسکتا ہے اور $م و لا + م و لا$ کی بجائے

(بم + ب لا) $م و لا$

پھر اگر $م = م$ = $م$ + $م$ اور $م = م$ = $م$ - $م$ تو ہم

$م و لا + م و لا + م و لا + م و لا$

کی بجائے (ب + ب لا) $م و لا$ + (بم + ب لا) $م و لا$ - $م$ ب لا

یعنی $م و لا$ [(ب + بم) جم ب لا + (ب - بم) خ جب ب لا]

+ $م و لا$ [(بم + بم) جم ب لا + (بم - بم) خ جب ب لا]

اور اسلئے $م و لا$ (ج جم ب لا + ج جب ب لا) + $م و لا$ (ج جم ب لا + ج جب ب لا)

یعنی $\text{فولا} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جسم ب لا + $\text{فولا} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جسم ب لا

یا دوسری صورت میں $\text{د فولا جیم} (\text{ب لا د}) + \text{د فولا جیم} (\text{ب لا د})$ لکھ سکتے ہیں۔

آخری تین صورتوں میں سے ہر ایک میں چار اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں جو ابتدا کے اختیاری مستقلات $\text{ا}^1, \text{ا}^2, \text{ا}^3, \text{ا}^4$ کی بجائے ہیں پس اس صورت میں بھی اختیاری مستقلات کی تعداد (۴) ہی رہتی ہے جو اس حل کو عام سے عام بنانے کے لئے ضروری ہے۔ ظاہر ہے کہ اس قاعدہ کی توسیع اُس صورت میں بھی ہو سکتی ہے جبکہ خیالی اصولوں کی کوئی سی تعداد مساوی ہو۔

$$۳۵ - \text{مساوات} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۳ = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲ = ۰ \text{ کو حل کرو}$$

اس جگہ آزمائشی حل $\text{ما} = \text{ا فولا}$ ہے، اس کو مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}^۲ - ۳\text{م} + ۲ = ۰$$

جبکی اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔

پس $\text{ما} = \text{ا فولا}$ اور $\text{ما} = \text{ا فولا}^۲$ دونوں خاص حل ہیں اور

$$\text{ما} = \text{ا فولا} + \text{ا فولا}^۲$$

عام حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں۔

$$\text{مثال ۲ - حل کرو} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ا}^۲ = ۰ \text{ کو}$$

یہاں ابتدائی مساوات $\text{م} - \text{ا}^۲ = ۰$ ہے اور اس کی اصلیں $\text{م} = \pm \text{ا}$

اور عام حل ہے $ما = ا + فو + لا - فولا$

اور اگر ضرورت ہو تو اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$ما = بب + جمر + لا + بب + جمر + لا$$

جہاں $ا$ کی بجائے $بب + بب$ اور $ف$ کی بجائے $ب - بب$ لکھا گیا ہے

$$\text{مثال ۳} - \frac{فر^۲ ما}{فر لا} + لا^۲ ما = کو حل کرو$$

یہاں امدادی مساوات $م^۲ + لا^۲ = کو$ کی اصلیں $م = \pm لا$ ہیں

اور عام حل ہے $ما = ا + جمر + لا + لا + جمر + لا$

یا دوسری صورت میں $ما = بب + جمر (ا + لا + بب)$

$$\text{مثال ۴} - \frac{فر^۳ ما}{فر لا} - \frac{فر^۲ ما}{فر لا} + \frac{فر ما}{فر لا} - ما^۲ =$$

یا (عف - ۱) (عف - ۲) $ما = کو$ جہاں $فر$ کی بجائے عف

لکھا گیا ہے۔

امدادی مساوات ہے $م^۲ - ۲م + ۵ = ۲$

یا $(م - ۱)(م - ۲) = ۰$ یعنی اصلیں ۱، ۲ ہیں

پس عام حل ہے $ما = (ا + لا) (ف + لا) + فو + لا$

$$\text{مثال ۵} - (عف + ۱)(عف - ۱) ما = کو$$

امدادی مساوات ہے $(م + ۱)(م - ۱) = ۰$

جس کی اصلیں ± ۱ ہیں، اس لئے عام حل ہے

$$ما = ا + جمر + لا + لا + جمر + لا + فو$$

$$یا م = ب + جم (لا + بی) + ل + و$$

مثال ۶۔ حل کرو (عف + عف + ا) (عف - ۲) م = کو

امدادی مساوات ہے (م + م + ا) (م - ۲) =

اور اس کی اصلیں ہیں - $\frac{1}{۲} \pm \frac{۳}{۲}$ اور ۲ اس لئے عام حل ہے

$$م = ل + و - \frac{۳}{۲} جم لا م + ل + و - \frac{۳}{۲} جب لا م + ل + و$$

$$یا م = ب + و - \frac{۳}{۲} جم (لا م + بی) + ل + و$$

مثال ۷۔ (عف + عف + ا) (عف - ۲) (عف - ۵) م = کو حل کرو
صریحاً اس کا عام حل ہے

$$م = (ل + ل + لا) و - \frac{۳}{۲} جم لا م + (ل + ل + لا) و - \frac{۳}{۲} جب لا م$$

$$+ (ل + ل + لا + ل + لا) و - \frac{۳}{۲} و - \frac{۳}{۲}$$

جس میں آٹھ اختیاری مستقل شامل ہیں۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$۱۔ \frac{۲}{۳} م - (ب + ل) \frac{۲}{۳} + ب م =$$

$$۲۔ \frac{۲}{۳} م - ل \frac{۲}{۳} + ل \frac{۲}{۳} - ل م =$$

$$۳۔ \frac{۲}{۳} م - ۹ \frac{۲}{۳} + ۲۳ \frac{۲}{۳} - ۱۵ م =$$

$$۴ - \frac{۳}{۳} م = \frac{۳}{۳} م + ۲ = ۵ - \frac{۳}{۳} م = م$$

$$۶ - \frac{۴}{۴} م = م - (عف - ۱) (عف - ۲) = م$$

$$۸ - (عف + ۱) (عف + ۲) (عف + ۳) = م - ۹ - (عف + ۱) (عف - ۱) = م$$

$$۱۰ - (عف + ۱) (عف + ۲) (عف + ۳) = م$$

$$۱۱ - (عف - ۱) (عف - ۲) (عف + ۳) (عف + ۴) = م$$

$$۱۲ - (عف + ۱) (عف + ۲) (عف + ۳) (عف + ۴) (عف + ۵) = م$$

خاص تکمیلی

۳۶ - اوپر ہم نے مساوات ف (عف) م = و کے متم تفاعل پر غور کیا ہے جہاں

$$ف (عف) = عف + ۱ عف + ۲ عف + ۳ عف + ۴ عف + ۵ عف + \dots + ۱$$

اور ۱، ۲، ۳، ۴، ۵،، ۱ مستقل ہیں و، لا کا کوئی تفاعل ہے، اب ہم اس مساوات کے خاص تکمیلی کو حاصل کرنے کے چند کارآمد طریقوں پر غور کرتے ہیں -

ہم اوپر کی مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں م = $\frac{۱}{ف (عف)}$ و

یا [ف (عف)] آ و جہاں $\frac{۱}{ف (عف)}$ ایک ایسا عامل ہے کہ

$$ف (عف) \left[\frac{۱}{ف (عف)} و \right] = و$$

۳۷۔ ”عف“ جبر و مقابلہ کے اساسی اصولوں کو پورا کرتا ہے
تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ عامل عف

(یعنی $\frac{م}{و}$) قوانین ذیل کو پورا کرتا ہے
(۱) جبر و مقابلہ کا تقیسی قانون یعنی

$$\text{عف} (م + و + ه + ...) = \text{عف} م + \text{عف} و + \text{عف} ه + \dots$$

(۲) قانون مبادلہ صرف بلحاظ مستقلوں کے یعنی
عف (ج م) = ج (عف م)
(۳) قانون قوت نما یعنی

$$\text{عفا} \text{ عف} م = \text{عف} م + م$$

جہاں م، ن مثبت صحیح ہیں۔
پس رہز یا علامت عف جبریہ مقادیر کی باہمی ترکیب کے تمام
ابتدائی قوانین کو پورا کرتی ہے صرف متغیر مقداروں کے ساتھ اس
کا تبادلہ نہیں ہو سکتا۔

پس معلوم ہوا کہ کسی منطق جبریہ تماشل کے جواب میں عاملوں
کا بھی ایک متناظر تماشل ہو گا مثلاً مسئلہ ثنائی کی رو سے

$$(م + و) = م + و + م + و + \dots + \frac{م(و-۱)}{۲ \times ۱} + \frac{و(م-۱)}{۲ \times ۱} + \dots + و$$

اور ایسے ہی بغیر فرید ثبوت کے عاملوں کے لئے متناظر مسئلہ کی رو سے

$$(\text{عفا} + و) = \text{عفا} + و + \text{عفا} + و + \dots + \frac{\text{عفا}(و-۱)}{۲ \times ۱} + \frac{و(\text{عفا}-۱)}{۲ \times ۱} + \dots + و$$

$$= \text{عفا} + و + \text{عفا} + و + \dots + \frac{\text{عفا}(و-۱)}{۲ \times ۱} + \frac{و(\text{عفا}-۱)}{۲ \times ۱} + \dots + و$$

۳۸۔ عل ف (عف) و لا
تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر مثبت صحیح ہو تو
عف و لا = و لا

فرض کرو کہ عل عف۔ ایسا ہے کہ
عف عف۔ می = می
اس تعریف کے مطابق عف۔ اعل تکمل کو تعبیر کرتا ہے، ہم فرض
کرتے ہیں کہ عل عف۔ ا ہی میں کسی اختیاری مستقل کا اضافہ نہیں
ہوتا (کیونکہ یہاں صرن ایک خاص تکملی کی تلاش ہے نہ کہ عام
سے عام تکملی کی)

اب چونکہ عف۔ و لا = عف۔ و لا = عف۔ و لا

اس سے ظاہر ہے کہ عف۔ و لا = و لا
اس لئے ظاہر ہے کہ ف کی تمام مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے
عف و لا = و لا

۳۹۔ فرض کرو کہ ف (می) کوئی جملہ می کا ہے جو ی کی مثبت
یا منفی صحیح قوتوں میں (= حج و می۔ جہاں و ایک مستقل ہے
اور می پر منحصر نہیں ہے) پھیل سکتا ہے

تب ف (عف) و لا = (حج و عف) و لا

= (حج و عف و لا)

= (حج و لا) و لا

= ن (ر) فولا
عمل ن (عف) فولا کا جو حاصل ہے وہ عف کی بجائے ر رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{\text{عف}^2 + 2\text{عف} + 1}$ فولا کی قیمت معلوم کرو۔

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوب ہے

$$\frac{\text{فولا}^2}{15} \quad \text{فولا} \quad \frac{1}{1+2+2+2}$$

مثال ۲۔ $\frac{\text{عف} + 1}{(\text{عف} + 2)(\text{عف} + 3)(\text{عف} + 4)}$ فولا کی قیمت معلوم کرو

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوب ہے $\frac{2}{1 \times 2 \times 5} \text{فولا}^3 = \frac{2}{1.05} \text{فولا}^3$

امثلہ

۱۔ ذیل کے غلوں کو پورا کرو۔

$$(۱) \frac{1}{\text{عف} + 1} \text{فولا} \quad (۲) \frac{1}{(\text{عف} + 1)(\text{عف} + 2)} \text{فولا}$$

$$(۳) \frac{1}{(\text{عف} + 2)(\text{عف} + 3)(\text{عف} + 4)} \text{جمر لا}$$

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{عف}^2}{(\text{عف} - ۱)(\text{عف} - ۲)(\text{عف} - ۳)} = \frac{1}{(ج - ۱)(ج - ۲)(ج - ۳)}$ فولا

۳۔ ذیل کے نتائج ثابت کرنے میں دفعہ ۳۹ کو استعمال کرو

ف (عف) جب م لا = ف (م) جب م لا

ن (عف) جب م لا = ف (م) جب م لا

ف (عف) جہنم لا = ف (م) جہنم لا

۴۰۔ عمل ف (عف) و لا

فرض کر دو کہ ما = دُو ما جہاں ما، لا کا تفاعل ہے۔

تب چونکہ عفو = اذکار

اس لئے یلب نیز کے مسئلہ کی رو سے

ما۔ فو^۱) (و ما + ج و عفا^۲ ما + ج و عفا^۳ ما + + عفا^ن ما)

جسے مسئلہ شنائی کی طرح کہنے سے حاصل ہوتا ہے [دفعہ ۳۷]

عَمَّ فَوْلا مَا = فَوْلا (عَف + وَا) مَا

جہاں ن مثبت صحیح ہے۔
اب فرض کرو کہ (عف + ر) = ما = لا

اب فرض کرو کہ (عق + و) ما = لا

جسے ہم لکھ سکتے ہیں $\text{ما} = (\text{ع} + \text{و})^{\text{و}}$ لا

تب چونکہ عفو \neq فو (عفو + ز) ما

يا عفت^ن فو^{لا} (عفت + لا) = فو^{لا} لا

اس لئے عَفَّ - نُوْلاً لا = نُوْلاً (عَفَّ + اِ) - ن لا

اس لئے تمام صورتوں میں ن کی مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

$$\text{عف}^{\text{ان}} \text{وولا}^{\text{لا}} = \text{وولا}^{\text{لا}} (\text{عف} + 1)^{\text{لا}}$$

۴۱۔ جیسا دفعہ ۳۹ میں ہم نے دیکھا

$$ف (عف) \text{ فولا } لا = ح (عف) \text{ فولا } لا$$

$$= ح (عف) \text{ فولا } لا$$

$$= \text{فولا } ح (عف + لا) لا$$

$$= \text{فولا } ف (عف + لا) لا$$

یعنی فولا کو ہم عامل ف (عف) کے بائیں جانب سے دائیں جانب لاسکتے ہیں بشرطیکہ ہم عف کی بجائے عف + لا لکھ دیں۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا = \frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا = \frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا$

مثال ۲۔ $\frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا = \frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا = \frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا$

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا، \frac{1}{(عف-1)^2} \text{ فولا } لا، \frac{1}{(عف-1)} \text{ فولا } لا$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا = \frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا = \frac{1}{(عف-1)^3} \text{ فولا } لا$$

۴۲۔ عمل ف (عف) جب م لا

$$\text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

اور اس لئے عفا^۲ جب م لا = (-م^۲) جب م لا
اس لئے حسب سابق (دفعات ۳۹، ۴۱) معلوم ہوگا کہ

$$ن (\text{عفا}^2) \text{ جب } م \text{ لا} = ن (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

مثال ۴: $\frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا} = \text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} = \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا}$ [دفعہ ۴۱]

$$= \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا} = \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا}$$

$$= \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا} = \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا}$$

$$= \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا} = \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا}$$

یہاں

مثلاً

۱۔ اس طریقہ سے جملات ذیل کے تکملی معلوم کرو

$\frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا}$ ، $\frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا}$ ، $\frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا}$

۳۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا} = \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا} = \frac{ن}{۱+۲ب} \text{ جب } م \text{ لا}$$

۳۔ جیب اور جیب التمام کی قوت نمائی قیمتوں کے ذریعہ اعمال
ن (عفا) جب م لا، ن (عفا) جب م لا کے نتائج حاصل کرو۔

$$۴۳ - \text{عمل } \frac{۱}{\text{ف (دعفا)}} \text{ جب م لا}$$

اب ہم عمل $\frac{۱}{\text{ف (دعفا)}}$ جب م لا پر غور کریں گے جہاں ف (دی) ایک

ایسا تعامل می کا ہے کہ اسے ہم می کی مثبت صحیح قوتوں میں پھیلا

سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (دعفا) کو عفا کی قوتوں میں پھیلا یا گیا ہے، اب

اگر پھیلاؤ میں طاق قوتیں شریک نہ ہوں تو دفعہ ماقبل کے قاعدہ کی

رو سے اوپر کے عمل کا نتیجہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\text{مثلاً } \frac{۱}{\text{ا+عفا+عفا+عفا}} \text{ جب م لا} = \frac{۱}{۶۴-۱۶+۳۲-۱} \text{ جب م لا} = \frac{۱}{۵۱} \text{ جب م لا}$$

لیکن اگر ہر دو طاق اور جفت قوتیں شریک ہوں تو اس طرح عمل ہو سکتا

ہے، جفت قوتوں کو الگ اور طاق قوتوں کو الگ اکٹھا کرو اور عمل

مذکور کو اس طرح لکھو

$$\frac{۱}{\text{ف (دعفا)}} \text{ جب م لا} = \frac{۱}{\text{ف (دعفا) + عفا فا (دعفا)}} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{ف (دعفا) - عفا فا (دعفا)}}{[\text{ف (دعفا)}] - [\text{عفا فا (دعفا)}]} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{[\text{ف (دعفا) - عفا فا (دعفا)}]}{[\text{ف (دعفا)}] - [\text{عفا فا (دعفا)}]} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{ف (دعفا) جب م لا - م فا (دعفا) جب م لا}}{[\text{ف (دعفا)}] - [\text{عفا فا (دعفا)}]} \text{ جب م لا}$$

بقدر دیکھتے سے معلوم ہوگا کہ علی طور پر عفا کی بجائے - مم فوراً اس منزل

$$\frac{1}{\text{فہ}(\text{عفا}) + \text{عفا}(\text{فہ})}$$
 جب مم لا کے بعد لکھ سکتے
 ہیں یعنی اوپر کے جملہ کی بجائے

$$\frac{1}{\text{فہ}(-\text{مم}) + \text{عفا}(\text{فہ}-\text{مم})}$$
 جب مم لا

یا

$$\frac{\text{فہ}(-\text{مم}) - \text{عفا}(\text{فہ}-\text{مم})}{[\text{فہ}(-\text{مم})] - \text{عفا}[\text{فہ}(-\text{مم})]}$$
 جب مم لا وغیرہ
 فوراً لکھ سکتے ہیں۔

مثال ۱ - $\frac{1}{\text{عفا}^3 + \text{عفا}^2 + \text{عفا} + 1}$ جب مم لا کی قیمت
 معلوم کرو۔

$$\text{یہ ہے } \frac{1}{\text{عفا}^3 + 1 + \text{عفا}(\text{عفا}^2 + 1)}$$
 جب مم لا

$$\text{یا } \frac{1}{3 - (\text{عفا} + 1)}$$
 جب مم لا

$$\text{یا } \frac{\text{عفا} - 1}{3 - (\text{عفا} - 1)}$$
 جب مم لا

$$\text{یا } \frac{1}{15} (\text{عفا} - 1)$$
 جب مم لا

$$\text{یا } \frac{1}{15} \text{ جم مم لا} - \frac{1}{15}$$
 جب مم لا

مثال ۲ - $\frac{1}{3(\text{عفا} - 1)}$ فوراً جم لا کی قیمت حاصل کرو

$$\text{یہ جملہ} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \text{ جم لا}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}} \text{ جم لا}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} - \frac{1}{17} - \frac{1}{18} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20}} \text{ جم لا}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} - \frac{1}{17} - \frac{1}{18} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20}} \text{ جم لا}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} - \frac{1}{17} - \frac{1}{18} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20}} \text{ جم لا}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} - \frac{1}{17} - \frac{1}{18} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20}} \text{ جم لا}$$

مثلاً

۱۔ جملات ذیل پر مندرجہ ذیل عمل کرو۔

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \text{ جب لا}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{11}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{13}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{14}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{15}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{17}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{18}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{19}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{20}}$$

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{11}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{13}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{14}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{15}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{17}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{18}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{19}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{20}}$ جہاں ن تنگلی علامتیں ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{11}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{13}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{14}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{15}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{17}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{18}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{19}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{20}}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے سے

عمل $\frac{1}{\text{عف}}$ و معمولی تکملوں کے حاصل جمع کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ عامل $\frac{1}{\text{عف}}$ و جہاں و مقدار جبریہ ہے۔

اگر عمل $\frac{1}{\text{عف}}$ و میں و متغیر لا کا ایک جبریہ،

منطق، صحیح تفاعل ہو تو ہم $\frac{1}{\text{عف}}$ کو کسی نہ کسی طریقہ سے عف کی صعودی قوتوں میں اس حد تک پھیلا سکتے ہیں کہ عف کا قوت نما و میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کے مساوی ہو۔

مثال ۱۔ مثلاً معلوم کرو $\frac{1}{\text{عف} + \text{عف}^2} (1 + 2\text{لا} + 1)$

یہ جملہ $= \frac{1 - \text{عف}}{1 - \text{عف}^3} (1 + 2\text{لا} + 1)$

$= (1 - \text{عف} + \text{عف}^2 - \text{عف}^3 + \dots) (1 + 2\text{لا} + 1)$

$= (1 + 2\text{لا} + 1) - (1 + 2\text{لا} + 1)\text{عف} = 2\text{لا}$

مثال ۲۔ نیز عف^۱ + عف^۲ + عف^۳ - ۱ کی قیمت دریافت کرو

جملہ $= 2\text{لا} \frac{1}{(1 - \text{عف}) + 2(1 - \text{عف})^2 + (1 - \text{عف})^3 - 1}$

$= 2\text{لا} \frac{1}{1 - 3\text{عف} + 3\text{عف}^2 - \text{عف}^3}$

$= 2\text{لا} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\text{عف} + \frac{1}{6}\text{عف}^2 + \frac{1}{6}\text{عف}^3}$

اس مشکل سے بچنے کے لئے ہم دفعہ ۴۱ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں جس سے حال ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{عف}} = 1 = \frac{1}{\text{لا فو}}$$

جو مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

ایک اور طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ہم عمل $\frac{1}{\text{عف} - 1}$ کو کا بغور معائنہ کرتے ہیں۔

لا کی بجائے لا (۱ + ع) کہنے سے

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} \cdot \frac{1}{\text{ع} + 1} = \frac{1}{\text{ع} + 1} \cdot \frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$$

$$= \frac{1}{\text{ع} + 1} \cdot \frac{1}{\text{ع} + 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} (1 + \text{ع} + \frac{\text{ع}^2}{2} + \frac{\text{ع}^3}{3} + \dots)$$

$$= \frac{1}{\text{ع} + 1} \cdot \left[\frac{1}{\text{ع} + 1} + \frac{\text{ع}}{2} + \frac{\text{ع}^2}{3} + \dots \right] \cdot \frac{1}{\text{فو}}$$

اس جملہ میں سے حصہ ہا $\frac{1}{\text{ع} + 1}$ لا متناہی ہو جاتا ہے لیکن اسے ہم متمم تفاعل $\frac{1}{\text{فو}}$ کے ساتھ لے سکتے ہیں اور چونکہ $\frac{1}{\text{ع} + 1}$ کی قیمت اختیاری ہے اس لئے ہم $\frac{1}{\text{ع} + 1}$ کو ایک نیا اختیاری مستقل ب تصور کرتے ہیں کیونکہ $\frac{1}{\text{ع} + 1}$ کا ایک حصہ منفی اور غیر متناہی فرض کیا جاسکتا ہے جو رقم $\frac{1}{\text{ع} + 1}$ کا توازن کر دے گا۔

پس لا $\frac{1}{\text{ع} + 1}$ مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

باقی رقموں میں $\frac{1}{\text{ع} + 1}$ شریک ہوتا ہے جو $\frac{1}{\text{ع} + 1}$ کے لا انتہاکم ہونے سے معدوم ہو جاتی ہیں۔

پس مساوات کا پورا عمل $\frac{1}{\text{ع} + 1} + \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{لا فو}}$ ہے۔

مثال ۳۔ مساوات (عفا + عفا۳) (عفا - ۱) = فو + فو۲ + فو۳ + جب لا + لا۲
کو حل کرو۔

اس صورت میں متم تفاعل صریحاً لا + لا۲ + فو + فو۲ + فو۳ (لا + لا۲) فو ہے۔
خاص تکمیلی کے چار حصے ہیں یعنی

$$\frac{1}{(عفا + عفا۳)(عفا - ۱)} = فو = \frac{1}{(عفا - ۱)} \times \frac{فو}{عفا} = \frac{فو}{عفا} \times \frac{1}{عفا} = \frac{فو}{عفا^2}$$

$$\left[\frac{1}{(عفا + عفا۳)(عفا - ۱)} = \frac{فو}{عفا} = \frac{فو}{عفا} \times \frac{1}{عفا} = \frac{فو}{عفا^2} \right] \text{ یا ملاحظہ ہو } \frac{1}{(عفا - ۱)} = \frac{فو}{عفا} \times \frac{1}{عفا} = \frac{فو}{عفا^2}$$

(ایک حصہ جو متم تفاعل میں چلا جاتا ہے)

$$+ \frac{لا^2}{عفا} + (ایسی رقمیں جو حصہ کے ساتھ معلوم ہو جاتی ہیں)$$

$$\frac{1}{(عفا + عفا۳)(عفا - ۱)} = \frac{فو}{عفا} = \frac{فو}{عفا} \times \frac{1}{عفا} = \frac{فو}{عفا^2}$$

$$\frac{1}{(عفا + عفا۳)(عفا - ۱)} = \frac{فو}{عفا} = \frac{فو}{عفا} \times \frac{1}{عفا} = \frac{فو}{عفا^2}$$

$$\frac{1}{(عفا + عفا۳)(عفا - ۱)} = \frac{فو}{عفا} = \frac{فو}{عفا} \times \frac{1}{عفا} = \frac{فو}{عفا^2}$$

$$= (۳ جب لا - جم لا) / ۲۰$$

اور اخیر میں

$$\frac{1}{(عفا + عفا۳)(عفا - ۱)} = \frac{فو}{عفا} = \frac{فو}{عفا} \times \frac{1}{عفا} = \frac{فو}{عفا^2}$$

$$= \frac{1}{عفا} \times \frac{1}{(عفا + عفا۳)(عفا - ۱)} = \frac{1}{عفا} \times \frac{1}{(عفا + عفا۳)(عفا - ۱)}$$

فرض کرو کہ $\frac{فر}{فوت}$ کی بجائے ہم عف کہتے ہیں، اس طرح سے حاصل ہوگا

$$\frac{لا فر}{فر لا} = \frac{لا^۱ فر^۱ - لا^۱ فر^۱}{فر لا^۱ - فر لا^۱} = \frac{لا^۱ فر^۱}{فر لا^۱} + \frac{لا^۱ فر^۱}{فر لا^۱} + \frac{لا^۱ فر^۱}{فر لا^۱}$$

$$یا لا^۱ فر^۱ / فر لا^۱ = (لا فر - ن + ۱) لا^۱ فر^۱ / فر لا^۱$$

$$= (عف - ن + ۱) لا^۱ فر^۱ / فر لا^۱$$

اب ن کو باتواتر ۲، ۳، ۴، کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{لا^۱ فر^۱}{فر لا^۱} = (عف - ۱) لا^۱ فر^۱ / فر لا^۱ = (عف - ۱) عفا$$

$$\frac{لا^۲ فر^۲}{فر لا^۲} = (عف - ۲) لا^۲ فر^۲ / فر لا^۲ = (عف - ۲) عفا$$

اس لئے عام طور پر

$$\frac{لا^۱ فر^۱}{فر لا^۱} = (عف - ۱) عفا + (عف - ۲) عفا + \dots + (عف - ۱) عفا$$

یا ان عملوں کی ترتیب الٹنے سے

$$عفا (عف - ۱) + عفا (عف - ۲) + \dots + عفا (عف - ۱)$$

مثال - ذیل کی تفرقی مساوات کو حل کرو

$$\frac{لا^۳ فر^۳}{فر لا^۳} + \frac{لا^۲ فر^۲}{فر لا^۲} + \frac{لا فر^۱}{فر لا} = ۳ - \frac{لا فر^۱}{فر لا}$$

رکھو لا = فوت، اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$عفا (عف - ۱) + عفا (عف - ۲) + \dots + عفا (عف - ۱) = ۳ - \frac{لا فر^۱}{فر لا}$$

$$یا (عف^۳ - عف^۲ + عف - ۳) = ۱ = فو^۲ + فو$$

یعنی (عف - ۱) (عف + ۳) = ۱ = فو^۲ + فو
جس سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ = فو + بجم ت ۳ + ججب ت ۳ + فو^۲ + فو$$

$$یا ۱ = لا + بجم (۳ لوک لا) + ججب (۳ لک لا) + لا^۲ + لا لک لا$$

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$۱۔ لا^۲ فر لا + لا فر لا + ق^۲ = ۱$$

$$۲۔ لا^۲ فر لا + لا فر لا + ق^۲ = (لوک لا) + لا جب لوک لا + جب ق لوک لا$$

$$۳۔ لا^۲ فر لا + لا^۲ فر لا + لا فر لا + لا = لا + لوک لا$$

$$۴۔ لا^۲ فر لا + لا^۲ فر لا - لا فر لا + لا = لا + لا^۲$$

$$۵۔ (۱ + ب لا) فر لا + ب (۱ + ب لا) فر لا + ق^۲ = ۱$$



باب پنجم

قائم مریات، متفرق مساواتیں

قائم مری

۴۸۔ کارٹیزی مساواتیں۔ مساوات ف (لا، ما، ا) =۔ منحنیات کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اب سوال زیر بحث یہ ہے کہ اگر منحنیات کے ایک قبیل کی مساوات دی ہوئی ہو تو ہم ایک ایسے قبیل منحنیات کی مساوات معلوم کریں جس کا ہر ایک رکن پہلے قبیل کے ہر ایک رکن کو علی القوائم قطع کرے۔ جیسا پہلے بتایا گیا ہے ایسے سوالات میں ضروری ہے کہ پہلے قبیل کے تمام رکنوں پر ایک ساتھ عمل کیا جائے، اس لحاظ سے مخصوص کرنے والا مستقل لا اس قبیل کی مساوات میں شریک نہیں ہوتا چائے، دفعہ ۲ میں بتایا گیا ہے کہ لا ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ ساقط ہو سکتا ہے

$$ف (لا، ما، ا) =۔$$

$$جف ف لا + جف ف ما \times \frac{جف ف لا}{جف ف ما} =۔$$

$$فرض کرو کہ یہ حاصل اسقاط ف (لا، ما، ا) =۔$$

ہے پس یہ پہلے قبیل کی تفرقی مساوات ہے۔

اب جہاں پہلے نظام کا ایک رکن دوسرے نظام کے ایک رکن کو

قطع کرتا ہے اس نقطہ پر ان دو منحنیات کے تماس علی القوائم ہیں۔
پس اگر اس نقطہ تقاطع کے رواں محدود بلحاظ دوسرے قبیل کے منحنی کے
ضاماً عا اور اگر اسی نقطہ کو پہلے قبیل کے مذکورہ منحنی پر خیال کیا جائے
اور اس کے لحاظ سے اس کے رواں محدود لا، ما ہوں تو

$$\text{ضا} = \text{لا}، \text{عا} = \text{ما}، \frac{\text{حرا}}{\text{حرضا}} = \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}} - \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$$

اس لئے دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{وہ (ضا، عا)۔ حرضا} = \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}} = \text{۔}$$

اور اس کو تکمیل کرنے سے پہلے نظام کے قائم مریات کا قبیل حاصل ہوگا۔
اس لئے قاعدہ یہ ہے۔

مساوات معلومہ کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$ کی بجائے
- $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$ لکھو اور تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔

۴۹۔ قطبی مساواتیں۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محدودوں میں دی ہوئی ہو

تو وہ ناویہ جو سمتی نیم قطر تماس کے ساتھ بنانا ہے $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$ ہوگا،
اس صورت میں قاعدہ مذکورہ یہ ہوگا۔

مساوات کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$ کی

بجائے - $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$ لکھ کر نئی تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔

۵۰۔ دائروں کے قبیل $\text{لا} + \text{ما} = ۲$ لا (۱)
کا ہر رکن محور ما کو مبدأ پر مس کرتا ہے، اس قبیل کے قائم مریات

کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $لا + ما = \frac{مر}{لا} = ۱$

اور ۱ کو ساقط کرنے سے $لا + ما = ۲ لا (لا + ما = \frac{مر}{لا})$

یعنی $لا + ۲ لا ما = ما - \frac{مر}{لا}$ (۲)
اس لئے نئی تفرقی مساوات ہوگی

$لا - ۲ لا ما = \frac{مر}{لا} - ما$

یا $ما + ۲ لا ما = \frac{مر}{لا} - لا$

جو ایک متجانس مساوات ہے اور اس میں $ما = ۱$ و $لا$ رکھنے سے اس کے متغیر الگ ہو سکتے ہیں۔

مگر چونکہ اس مساوات اور مساوات (۲) میں صرف اتنا فرق ہے کہ $لا$ ، $ما$ کا باہم تبادلاً کر دیا گیا ہے اس لئے اس کا مکملی ہوگا

$ما + ۲ لا ما = ۲ ما$

جو دائروں کا ایک اور نظام ہے جس کا ہر ایک رکن محور کا کو مبداء پر منس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ منحیات $\frac{لا}{لا + لہ} + \frac{ما}{ما + لہ} = ۱$ (۱)

کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو جہاں لہ اس قبیل کا متبذل ہے۔

یہاں $\frac{لا}{لا + لہ} + \frac{ما}{ما + لہ} = ۱$ (۲)

اور ان دو مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنا چاہئے۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے لا (ب^۱ + ل^۱) + ما^۱ (ل^۱ + ل^۱) =

$$\text{یا لہ} = \frac{\text{ب}^۱ \text{ لا} + \text{لا}^۱ \text{ ما}^۱}{\text{لا} + \text{ما}^۱}$$

$$\text{پس ل} + \text{ل} = \frac{\text{لا} - \text{ب}^۱}{\text{لا} + \text{ما}^۱}$$

$$\text{اور ب}^۱ + \text{لہ} = \frac{\text{لا} - \text{ب}^۱}{\text{لا} + \text{ما}^۱}$$

پس اس قبیل کی تفرقی مساوات ہے

$$۱ = \frac{\text{لا}^۲ (\text{لا} + \text{ما}^۱)}{\text{لا} (\text{لا} - \text{ب}^۱)} - \frac{\text{ما}^۲ (\text{لا} + \text{ما}^۱)}{\text{لا} (\text{لا} - \text{ب}^۱)}$$

$$\text{یا لا}^۲ - \text{ما}^۲ + \text{لا} \text{ ما}^۱ (\frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{\text{ما}^۱}) = \text{لا} - \text{ب}^۱ \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے ما کی بجائے $\frac{۱}{\text{ما}}$ لکھنے سے مطلوبہ مریات کے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{لا}^۲ - \text{ما}^۲ + \text{لا} \text{ ما}^۱ (\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{ما}^۱}) = \text{لا} - \text{ب}^۱ \dots\dots\dots (۴)$$

لیکن چونکہ اس میں اور مساوات (۳) میں کوئی فرق نہیں ہے اس لئے اس کا تنگی بھی وہی ہوگا

$$۱ = \frac{\text{لا}^۲}{\text{لا} + \text{ما}^۱} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{لا} + \text{ما}^۱}$$

جو ایسی مخروطی تراشوں کا ایک نظام ہے جو پہلے نظام کے ساتھ ہم

ماسکے ہیں۔
مثال ۳۔ دو مختلف قیمتوں کے لئے صنوبری خطوط کے قبیل

لہ = ل (۱ - جم طہ) کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $\frac{مر}{مر طه} = ر جب طه$
اور ر کو ساقل کرنے سے

$\frac{مر طه}{مر طه} = \frac{۱ - جم طه}{جب طه} = مس \frac{طه}{۲}$
اس لئے قائم مریات کے قبیل سے لئے

$\frac{۱}{ر} - \frac{مر}{مر طه} = مس \frac{طه}{۲}$

یا لوک ر = ۲ لوک جم طه + مستقل

یا ر = ب (۱ + جم طه)

جو ہم محور صنوبری خطوط کا ایک اور قبیل ہے جن کے قرون کا رخ متقابل سمت میں ہے۔

امثلہ

۱۔ اکی مختلف قیمتوں کے لئے مکافات ما' = ۴ و لا کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ م کی مختلف قیمتوں کے لئے متشابہ ناقصوں کے

قبیل $\frac{لا'}{لا} + \frac{ما'}{ب} = م$ کے قائم مریات کا نظام

$لا' = لا ماب$ ہے۔

۳۔ اکی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی الزاویہ لولبیوں

کے قبیل ر = ۱ و طه م عہ کے قائم مریات معلوم کرو۔

۴۔ اکی مختلف قیمتوں کے لئے ہم محور اور ہم ماسکہ مکافیوں

$\frac{۱}{ر} = ۱ + جم طه$ کے قائم مریات کا قبیل معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ منحنیات کے قبیل

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ - ۳ لا ۲ = ۱ \\ ۳ لا ۲ = ۲ ب \end{array} \right.$$

علی القوائم ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنیات رجب اعد = ۱ (جم طہ - جم عہ)

اور ر جنبر یہ = ۱ (جنبر یہ - جم طہ)

علی القوائم ہیں۔

۷۔ اگر ف (لا + خ ما) = می + خ و تو ثابت کرو کہ

$$می = ۱ اور و = ب$$

قائم منحنیات کے دو نظام ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مہ کی کسی مستقل قیمت کے لئے منحنیات کا قبیل

قبیل مہ مفر لا - قمر لا جم ما = مستقل سے منحنیات کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔
[ننڈن سنہ ۱۸۹۰ء]

علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں

$$۵۔ مساوات \frac{فری}{فرط} + می = ف (می)$$

ایک ایسے ذرہ کی حرکت کسی عام مساوات ہے جو ایک مرکزی قوت کے زیر اثر حرکت کر رہا ہو۔

$$۲ \frac{فری}{فرط} کے ساتھ ضرب دینے اور تکمیل کرنے سے$$

$$\left(\frac{فری}{فرط} \right) + می = ۲ ف (می) + ۱$$

جے ہم اس طرح کہہ سکتے ہیں $\int \frac{v^2}{v^2 + 2v + 1} dv = \frac{v}{v+1} + \frac{1}{v+1}$ اس طرح حل عمل میں آسکتا ہے۔

۵۲۔ $\frac{v^2}{v^2 + 2v + 1} + \frac{1}{v+1} = \frac{v}{v+1} + \frac{1}{v+1}$ مستقل سروں والی ایک خطی مساوات ہے، ایسی مساواتوں پر پہلے بحث ہو چکی ہے ان کا حل اس طرح بھی عمل میں آسکتا ہے۔ جب v $\frac{1}{v+1}$ کے ساتھ ضرب دو جو متکمل جزو ضربی ہے متکمل کرنے سے

جب v $\frac{1}{v+1}$ ۔ $\frac{v^2}{v^2 + 2v + 1} + \frac{1}{v+1} = \frac{v}{v+1} + \frac{1}{v+1}$ جب v $\frac{1}{v+1}$ ۔ اسی طرح $\frac{v^2}{v^2 + 2v + 1} + \frac{1}{v+1}$ متکمل جزو ضربی ہے اور اس کے جواب میں پہلا متکمل

جم v $\frac{1}{v+1} + \frac{1}{v+1} = \frac{v}{v+1} + \frac{1}{v+1}$ جب v $\frac{1}{v+1}$ ۔

$\frac{v^2}{v^2 + 2v + 1}$ کو ساقط کرنے سے

$\frac{1}{v+1} = \frac{1}{v+1} + \frac{1}{v+1}$ جب v $\frac{1}{v+1}$ ۔

۵۳۔ ایک ایسے جسم کی مساوات حرکت جس کی کیت بدلتی ہو

اکثر یہ صورت اختیار کرتی ہے

$$v^2 = \{v^2 + 2v + 1\} = \{v^2 + 2v + 1\}$$

اور اس کا مکمل جزو ضربی نہ (لا) $\frac{فری}{فرت}$ ہے۔

کیونکہ نہ (لا) $\frac{فری}{فرت}$ $\frac{فری}{فرت}$ { نہ (لا) $\frac{فری}{فرت}$ } = سا (لا) نہ (لا) $\frac{فری}{فرت}$
 جس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{۲}$ { نہ (لا) $\frac{فری}{فرت}$ } = سا (لا) نہ (لا) $\frac{فری}{فرت}$

$$\text{یا } \frac{1}{۲} \int \frac{\text{نہ (لا) فری}}{\text{سا (لا) نہ (لا) فری} + ۱} = \text{فرت}$$

تغیر جدا ہو گئے ہیں، پس حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

مزید توضیحی مثالیں

۵۴۔ کئی مساواتوں کو خاص ترکیبوں سے اوپر کی کسی نہ کسی معیاری صورت میں تبدیل کرنے سے حل کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔ } \frac{فری}{فری} = \text{ف (لا + ب م)}$$

فرض کرو کہ لا + ب م = ی

$$\text{تب } ۱ + ب \frac{فری}{فری} = \frac{فری}{فری}$$

$$\text{پس } ۱ + ب \text{ ف (ی)} = \frac{فری}{فری}$$

$$\text{اور فری} = \frac{فری}{۱ + ب \text{ ف (ی)}}$$

$$\text{یا لا + ج} = \int \frac{فری}{۱ + ب \text{ ف (ی)}}$$

مثال ۲۔ $\frac{لا^۲}{حریلا} (ما + لا حریلا) = ۱ + ۰$

رکھو لا ما = ی

تب $ما + لا حریلا = \frac{حری}{حریلا}$

$۰ = لا (حری - \frac{حری}{حریلا}) + ۱ = ۰$

یا ی = لا حریلا + $\frac{۱}{حریلا}$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے اور اسی کا کامل ابتدائی ہے

لا ما = لا ج + $\frac{۱}{ج}$

مثال ۳۔ $فوا^۲ (لا + ما) = (۱ - \frac{حریلا}{حریلا}) = فوا + فوا^۲ (\frac{حریلا}{حریلا})$ کو عمل کرو

فرض کر دو کہ فوا = عا اور فوا^۲ = ضا

اب چونکہ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$(فوا - فوا^۲ \frac{حریلا}{حریلا}) + ۱ = ۰$

اس لئے اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

عا - ضا $\frac{حریلا}{حریلا} = ۱ + (\frac{حریلا}{حریلا})$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے، اس لئے اس کا کامل ابتدائی ہے

عا = ج ضا + $\sqrt{۱ + ج}$

یا فوا = ج فوا + $\sqrt{۱ + ج}$

مثال ۴۔ $\frac{1}{2} \text{ لا} + \frac{1}{3} \text{ (لا۔ و ما۔ ب)} = \frac{1}{6} \text{ لا} =$

(ہندسہ جہات میں یہ مساوات اکثر واقع ہوتی ہے)

اس میں رکھو لا = اس اور ما = ات

مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$\frac{1}{2} \text{ (اس درت)} + \frac{1}{3} \text{ (س۔ ات۔ ب)} = \frac{1}{6} \text{ (اس درت)} - \frac{1}{6} \text{ (ات درس)}$

یا اس $\left(\frac{1}{2} \text{ درت}\right) + (س۔ ات۔ ب) = \frac{1}{6} \text{ درت} - ت =$

یعنی ت $(+ \frac{1}{6} \text{ درت}) = س \frac{1}{6} \text{ درت} (+ \frac{1}{6} \text{ درت}) - ب \frac{1}{6} \text{ درت}$

جس سے حاصل ہوتا ہے ت = س $\frac{1}{6} \text{ درت} - ب \frac{1}{6} \text{ درت}$

جو کلیروی شکل ہے، اس کا کامل ابتدائی ہے

ت = س ج - $\frac{ب ج}{+ ا ج}$

یا ج لا۔ ما = $\frac{ب ج}{+ ا ج}$

اس کا نادر مل ہے لا ± ما ± اب

جو چار خطوط مستقیم ہیں۔

مثال ۵۔ $\frac{1}{2} \text{ (لا۔ و ما۔ ب)} + \frac{1}{3} \text{ (لا۔ و ما۔ ب)} = \frac{1}{6} \text{ لا} =$ کو مل کر

فرض کرو کہ مساوات کو ہم اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ

$$\frac{م^2}{1+2لا} = ق$$

اس طرح لا سیدھے تکس سے بطور ت کے تفاعل کے معلوم ہو سکتا ہے

$$اب \quad \frac{م^2}{1+2لا} = \frac{ق}{1+2لا}$$

$$اور \quad \frac{م^2}{1+2لا} - \frac{ق}{1+2لا} = \frac{م^2 - ق}{1+2لا}$$

$$پس (1+2لا) \times \frac{م^2 - ق}{1+2لا} = م^2 - ق$$

$$پس مساوات معلومہ اس طرح کی مساوات $م^2 - ق = 0$ میں$$

میں تحویل ہو جاتی ہے جس کا حل ہے

$$م = 0 \text{ جب } ق = 0 \text{ یا } ق = 1$$

اور جب ت کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کی جاتی ہے تو حل معلوم

ماصل ہوتا ہے۔

[اگر مثبت ہو تو

$$\frac{1}{1+2لا} = ق$$

$$\frac{1}{1+2لا} = ق$$

$$اگر منفی ہو تو $\frac{1}{1-2لا} = ق$$$

یعنی $\frac{1}{x-1}$ جب $\frac{1}{x-1}$ (لا) $\frac{1}{x-1}$ (ت) =

مثال ۶۔ ذیل کی ہمزاد تفرقی مساواتوں کو حل کرو (جو مستقل سروں والی خطی مساواتیں ہیں)

$$۴ = \frac{۴}{x-1} + \frac{۹}{x-2} + ۳۴ = ۶۹ + ۳۴ = ۱۰۳$$

$$۳ = \frac{۳}{x-1} + \frac{۷}{x-2} + ۳۴ = ۳۸ + ۳۴ = ۷۲$$

ہم ان مساواتوں کو اس طرح لکھ سکتے ہیں ، ع ۱ ، ع ۲ ، ع ۳ کی بجائے لکھا گیا ہے

$$۴ = ۶۹ + (۳۴ + ۱۱) = ۱۰۳$$

$$۳ = ۷۲ + (۳۴ + ۷) = ۱۱۳$$

ان مساواتوں پر بالترتیب ۱ ، ع ۲ اور ۳ ع ۱ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو سا قح کرتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

$$[۴(۳۴ + ۱۱) - ۳(۳۴ + ۷)] = (۶۹ + ۳۴) - (۷۲ + ۳۴)$$

$$۴ - ۳ = ۳۸ - ۷۲ = -۳۴$$

$$۱ = (۳۴ + ۷) - (۳۴ + ۱۱) = -۴$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{۱}{-۴} + \frac{۳}{۳۴ + ۷} + \frac{۳}{۳۴ + ۱۱} = \frac{۱}{-۴} + \frac{۳}{۴۱} + \frac{۳}{۴۵}$$

$$۱ = \frac{۱}{-۴} + \frac{۳}{۴۱} + \frac{۳}{۴۵} + \frac{۱}{-۴} = \frac{۱}{-۴} + \frac{۳}{۴۱} + \frac{۳}{۴۵} - \frac{۱}{۴}$$

ما کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{۱}{x-1}$ کو اصلی مساواتوں سے سا قح

کرتے ہیں، پہلی مساوات کو ۷ سے اور دوسری کو ۹ سے ضرب دو اور تفریق کرو، اس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{مرا}}{\text{مرت}} + ۲\text{لا} + ۷ = ۷\text{ت} - ۹\text{قوت}$$

$$\text{پس } ۷ = ۷\text{ت} - ۹\text{قوت} - ۲\text{لا} - \frac{\text{مرا}}{\text{مرت}}$$

$$= ۷\text{ت} - ۹\text{قوت} - ۲\text{لا} + \left(\frac{۱۹\text{ت}}{۳} + \frac{۵۲\text{قوت}}{۹} - \frac{۲۹\text{قوت}}{۷} \right)$$

$$- \left(\frac{۱۹\text{ت}}{۳} + \frac{۵۲\text{قوت}}{۹} - \frac{۲۹\text{قوت}}{۷} \right)$$

$$= - \frac{۱۹\text{ت}}{۳} + \frac{۵۲\text{قوت}}{۹} + \frac{۲۹\text{قوت}}{۷}$$

$$\text{پس لا} = \frac{۱۹\text{ت}}{۳} + \frac{۵۲\text{قوت}}{۹} - \frac{۲۹\text{قوت}}{۷}$$

$$= - \frac{۱۹\text{ت}}{۳} + \frac{۵۲\text{قوت}}{۹} + \frac{۲۹\text{قوت}}{۷}$$

[طالب علم $\frac{\text{مرا}}{\text{مرت}}$ کے استقاط کا بغور ملاحظہ کرے، اس طرح زیادہ

مستقلات کو شریک کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی]

مثال ۷۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو حل کرو

$$\frac{\text{مرا}}{\text{مرت}} + ۳ = ۱۲\text{لا} =$$

$$\frac{\text{مرا}}{\text{مرت}} - ۵ = ۹\text{قوت} =$$

یہ مساواتیں اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہیں

$$(عفا + ۱۶) لا + ۳ عفا ما =$$

$$- ۵ عفا لا + (عفا + ۹) ما =$$

ان مساواتوں پر بالترتیب عفا + ۹ اور ۳ عفا کے ساتھ عمل کرنے اور تفرقی کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$[(عفا + ۱۶) لا + (عفا + ۹) ما + ۱۵ عفا] لا =$$

$$یا (عفا + ۲۰ عفا + ۱۲۲) لا =$$

$$یعنی (عفا + ۴) (عفا + ۳۶) لا =$$

جس سے لا = ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت
ما کے تفرقی سروں کو ساقط کرنے کے لئے پہلی مساوات کو تفرقی کرو
اور دوسری کے سہ چند کو اس سے تفرقی کرو، اس طرح ملیگا

$$\frac{۲ لا}{۳} + ۲۱ = \frac{۲ لا}{۲}$$

جس سے ہمیں ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے بغیر نئے مستقلوں کو شریک کرنے کے

$$ما = ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت$$

امثلہ

$$۱- ۲ لا ما - \frac{۲ ما}{۲ لا} - (۱- لا) ما = لا^۲$$

$$۲- ۲ قظ ما - \frac{۲ ما}{۲ لا} + ۲ جب ما (\frac{۲ ما}{۲ لا}) + مس ما = لا$$

$$۳- (۱+ ب لا) \frac{۲ ما}{۲ لا} + (۱+ ب لا) \frac{۲ ما}{۲ لا} + ب ما = لا$$

$$۴- (۱+ لا) \frac{۲ ما}{۲ لا} + ۲ لا (۱+ لا) \frac{۲ ما}{۲ لا} + ما =$$

$$۵- (۱- لا) \frac{فر۲}{فر۱} - لا \frac{فر۱}{فر۲} + ن۱ = ۰$$

$$۶- \frac{فر۱}{فر۲} = فر۱ - (فر۱ - فر۲)$$

$$۷- \frac{فر۱}{فر۲} = ۲ جب \frac{لا-۱}{۲} جم \frac{لا+۱}{۲} جم \frac{لا}{جم} = ۰$$

۸- ذیل کی تفرقی مساواتوں کے تکلی حاصل کرو

$$(۱) \frac{فر۲}{فر۱} - ۳ \frac{فر۱}{فر۲} + ۹ \frac{فر۱}{فر۲} + ۱۳ = ۰$$

$$(ب) \frac{فر۲}{فر۱} + ۶ \frac{فر۱}{فر۲} + ۹ = ۲۵ جم لا$$

$$(ج) لا \frac{فر۱}{فر۲} - ۵ لا \frac{فر۱}{فر۲} + ۱۰ = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۲$$

۹- ذیل کی ہمزاد مساواتوں کے نظام کو حل کرو

$$\frac{فر۲}{فر۱} + ۱۵ + ۳ می + ۳۰ = ۰$$

$$\frac{فر۱}{فر۲} + ۲ + ۱۰ می + ۴ = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۲$$

۱۰- اس منحنی کی شکل معلوم کرو جس میں رواں مماس کے میلان کا مماس محور لا کے ساتھ اس نقطہ کے محدود کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

۱۱- ایک منحنی میں کسی نقطہ پر کا انحنایہ ایسے بدلتا ہے جیسے اس زاویہ کی جیب التمام کا مکعب جو نقطہ مذکورہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے، منحنی کی صورت معلوم کرو۔

۱۲- جس منحنی میں انحنایہ کے نصف قطر کا ظل محور ما پر متقل ہو

اس کے لئے ثابت کرو کہ

$$(1) \quad s \infty \text{ لوک مس } \left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} \right)$$

$$(2) \quad m \infty \text{ لوک قط } \frac{\pi}{n}$$

نوٹ - (۱) میں s قوس کا طول ہے اور m و n کا میلان ہے محور la کے ساتھ۔



جوابات

صفحہ (۶)

۱۔ لا مس لا۔ لوک قظ لا = ماس ما۔ لوک قظ ما + ج

۲۔ $\frac{\text{لا۔ ما}}{۳} + \frac{\text{لا۔ ما}}{۲} + \text{لا۔ ما} = \text{ج}$

۳۔ ۲ لا ما + لا + ما + ج (لا + ما + ا) = ۱

۵۔ لوک $\sqrt{\text{لا} + \text{ما}} = \text{لوک لا} + \text{مس لا} + \text{ج}$

۶۔ ۳ (فو۔ فو) = لا + ج

۹۔ (۱) ما = ج $\frac{۱}{۲}$ (۲) ما = ۲ لا + ج

(۳) ر (ج۔ طه) = ۱ (۴) ر = ۱ طه + ج

۱۰۔ لا = $\sqrt{\text{لا۔ ما}} + \frac{۱}{۲}$ لوک $\frac{۱}{۲} - \sqrt{\text{لا۔ ما}}$ اگر ما = ۱ جبکہ لا = ۰۔

صفحہ (۱۱)

۱۔ ۲ ما نو = مس لا + مس لا + ج

۲۔ (ا + ب) = ما = ا جب ب لا۔ ب جم ب لا + ج نو

$$ج + \frac{٢+٥}{٢+٥} ا = ٣ - ٢$$

ح - ح لا ما = ما + ح ٥ - لا و ستا = ستا + ح

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} + y_1 + 1 + y_1 - 8 \quad \text{ج} + \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$-11 \quad x+1 = \frac{1}{1-\omega_6} \text{ و } -12 \quad x + \frac{1}{\sqrt[3]{\omega_2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\omega_6}}$$

$$13 - \frac{1}{m} = \frac{1}{m} + j \quad 14 - \frac{(1-\omega)^2}{4} = 1 + j \quad 15 - \frac{(1-\omega)^2}{4}$$

$$15. \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \quad 16. \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$-18 - \frac{9}{y} = \frac{1}{y^2} + j \quad (1) \quad (2) \quad (r+b) = f = \text{اجب بلا} - \text{بحم بلا} + \text{ج و}$$

$$(3) \text{ جب } \frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \text{ (۴) } f(a) + f(b) + f(c) = 1 \text{ (۵) } \frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1}$$

صفی (۱۷)

$$1 - \frac{1}{4} \text{ لوک } (1-9+9^2) + \frac{1}{81} \text{ لوک } \frac{1}{81} + \frac{9^2+9+1}{81+1+9^2} + \text{لوک } 9 \text{ لا جہاں } 9 = \frac{1}{9}$$

$$2 - \frac{1}{4} \text{ لوک } (3-2+5) + \frac{9}{2} \text{ لوک } \frac{-1+9+12}{-1+1+12} + \text{لوک } 3 = 2$$

صفحہ (۲۵)

$$۱- م + ۱ = ج \quad ۲- م = \frac{۲}{۲} + ل + ل + ج$$

$$۳- م + \frac{۲}{۲} = (ل + ۱) - \frac{۲}{۲} = (ل + ۱) - ۱ = ل$$

$$۴- ل = (ل + ۱) = ج$$

$$۵- ل = م + ۱ = \frac{۳}{۲} + ل + ل + ج$$

$$۶- جم = \left\{ \frac{۱ - (ل - ۱) - م}{ل - ۱} \right\} = ۱ - ل$$

$$۷- ل = \frac{۳}{۲} + ل + ل + ج$$

$$م = ل + ل + ج$$

$$۸- م = \frac{۳}{۲} + ل + ل + ج$$

$$ل = ل + ل + ج$$

صفحہ (۲۸)

$$۱- م = ل + ج$$

$$۲- م = ل + ج$$

$$۳- م = ل + ج$$

$$۴ - م = ج لا + لا ج + ج ب ، \frac{لا}{ب} + \frac{م}{ج} = ۱$$

$$۵ - م = (لا - ج) ج - ج ، (لا - ج) = م$$

$$۶ - (م - ج لا) (ج - ۱) = ج ، لا = م + ۱$$

صفحہ (۳۰)

$$۱ - م = ع لا + ع ، ۲ - م = ج لا + ع$$

$$لا = \frac{لوک ع - ع + ج}{۱(۱ - ع)} ، لا = ج + \frac{ع}{۱ - ۱}$$

$$۳ - م = ع لا + ع ، لا (۱ - ع) = ع + \frac{ع}{۱} + ج$$

$$۴ - م = (ع + ع) لا + \frac{۱}{ع} ، ع لا = ۱ + ۱ + \frac{۱}{ع}$$

$$۵ - م = (ع + ع) لا + \frac{۱}{۱ - ع} ، ع لا = (۱ - ۱) + ۱ + \frac{۱}{۱ - ع(۱ - ۱)}$$

$$۶ - م = ع لا + ع ، ع لا = \frac{ع}{۱ + ۱} + ۱$$

$$۵- (لا-ا) + (ما-ب) = ر \quad ۶- لا+ب = س \quad \frac{\text{فرما}}{\text{برا وقت } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}}$$

$$۷- ما+ب = س \quad \text{برا وقت } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶} \quad لا \text{ فرما}$$

$$۸- \frac{۱}{لا} = س \quad (\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{۲لا}) \text{ وقت } \frac{۱}{۲} \text{ فرما } + ب$$

$$۹- ما = ب \text{ مس } \frac{لا+ما+ا}{ب}$$

$$۱۰- لا+ا+ \frac{ما-ا}{ب} + جب = ما = .$$

$$۱۱- ما = ب لا- لا لوک لا$$

صفحہ (۴۲)

$$۱- لا ما = ق + لا + ب لا + ج$$

$$۲- (لا + جب لا) ما = جم لا + لا + ب لا + ج$$

$$۳- (ا) لا ما - لا ما + لا ما + لا ما + (لا-۶) ما = ق + ا$$

$$(ب) لا ما - ما + ما = ق + ا$$

$$(ج) لا ما - لا ما + لا ما - لا ما + لا ما + لا ما - لا ما - لا ما$$

$$+ \frac{۱}{۲} (لا + ما) = لا لوک لا +$$

صفحہ (۵۵)

اس نمبری کے جوابات میں \bar{A} ، \bar{B} ، \bar{C} وغیرہ اختیاری مستقل ہیں۔

$$۱- \bar{A} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} \quad ۲- \bar{A} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$$

$$۳- \bar{A} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} \quad ۴- \bar{A} = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} + \bar{D}$$

$$۵- \bar{A} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} \quad \text{جب } \frac{\bar{A}}{\bar{B}} + \frac{\bar{C}}{\bar{D}} = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{\bar{C} + \bar{D}}$$

$$۶- \bar{A} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} \quad \text{جب } \bar{A} + \bar{B} = \bar{C} + \bar{D}$$

$$۷- \bar{A} = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} + \bar{D} \quad \text{جب } \bar{A} + \bar{B} = \bar{C} + \bar{D}$$

$$۸- \bar{A} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} \quad \text{جب } \frac{\bar{A}}{\bar{B}} + \frac{\bar{C}}{\bar{D}} = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{\bar{C} + \bar{D}}$$

$$۹- \bar{A} = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} + \bar{D} \quad \text{جب } \bar{A} + \bar{B} = \bar{C} + \bar{D}$$

$$۱۰- \bar{A} = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) + \bar{D} \quad \text{جب } \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \bar{D}$$

$$+ (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} + \bar{D} \quad \text{جب } \frac{\bar{A}}{\bar{B}} + \frac{\bar{C}}{\bar{D}} = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{\bar{C} + \bar{D}}$$

$$۱۱- \bar{A} = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) + \bar{D} \quad \text{جب } \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \bar{D}$$

$$+ (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} + \bar{D}$$

$$2 + 2 + \frac{2^2}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{2} +$$

صفی (۷۵)

۱۔ $\text{اجب (ق لوک لا)} + \text{اجم (ق لوک لا)}$

$$2 - 1 = \text{رجب (ق لوک لا)} + \text{رجم (ق لوک لا)} + \frac{\text{لوک لا جم (ق لوک لا)}}{2} - \frac{2}{2}$$

$$3-6 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} (\text{لا جب}) (\frac{10}{9}) + \frac{1}{9} (\text{لا جم}) (\frac{10}{9})$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 6 - \frac{1}{9}$$

۵۔ ۶ = اُجب {ق پ} لوک (۱ + ب لا) + {ق پ} لوک (۱ + ب لا) =

صفحہ (۸۲)

۱- لا^۲ + ما^۲ = ب ۳- ر = ب و طه س عه م^۲ = $\frac{ب^۲}{ر}$ = ۱- ج م طه

صفحه (۱۸۹)

۱۔ رکھو ما = لای، ما = لا^۱۔ ۲ لا^۲ + ۲ لا^۲ + ج لا^۲ قولا

۲۔ رکھو مس = می، مس = وجم لا + ب جب لا + لا

۳۔ رکھو $ا + ب لا = قو$ ، $ما = ج (ا + ب لا) + د (ا + ب لا) م$

$$- \frac{ا + ب لا}{ب (ب + ا ب)} + \frac{ا}{ب ب}$$

جہاں $م$ ، $م$ مساوات $ب م + (ا ب - ب) م + ب =$ کی اسیں ہیں۔

۴۔ رکھو $می = سن لا$ ، $ما = (ا لا + ب) / ا + لا$

۵۔ رکھو $می = جب لا$ ، $ما = ا جب (ن جب لا) + ب جم (ن جب لا)$

۶۔ رکھو $قو = ضا$ ، $قو = عا$ ، $(قو - قو + ا) قو = ا$

۷۔ رکھو $جب لا = ضا$ ، $جب ما = عا$ ، $(جب ما - جب لا + ا) قو = ا$

۸۔ $(ا) ما = ا قو + ب قو جب ۳ لا + ج قو ۲ جم ۳ لا$

$(ب) ما = (ا + ب لا) قو ۳ + جم ۲ لا + ۳ جب لا$

$(ج) ما = ا لا جب (لوک لا) + ب لا ۲ جم (لوک لا)$

۹۔ $۲ + ما = ا جب ۳ لا + ب جم ۳ لا + ج جب ۳ لا + د جم ۳ لا$

۱۰۔ $۳ = ی$ ، $۶ = (ا جب ۳ لا + ب جم ۳ لا) + (ج جب ۳ لا + د جم ۳ لا)$

۱۱۔ $ما = ک لا + ا لا + ب$

—————

فہرست اصطلاحات

Canonical form

صورت آئینی

Clairaut's form

کلیرومی صورت

Commutative law

قانون مبادلہ

Complementary Function

مستم تفاعل

Complete primitive

کامل ابتدائی

Distributive law

قانون تقسیمی

Elimination

اسقاط

"Exact" Differential Equations

"یک" یا حاضر مساواتیں

Homogeneous Equations

متجانس مساواتیں

Index law

قانون قوت نما

Irreversible process

غیر انقلاب پذیر عمل

Linear Equations

خطی مساواتیں

Operator

عامل

Order

رتبہ

Orthogonal trajectory

قائم مری

Particular integral

خاص انضمامی

Rigid Dynamics

استوار اجسام کا علم حرکت

Singular Solution

نا در حل

ترتیب

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{etc}$$

درا، درلا، درلا وغیرہ

$$\frac{dy}{dx}$$

جف ما
جف لا

$$\int f(x) dx$$



رف (لا) درلا

$$D \left(= \frac{d}{dx} \right)$$

عفا (= درلا)

